

Aplicaciones y ejemplos del cálculo integral

Autora:
Tamara P. Bottazzi

Textos Básicos
Exactas

EDICIONES UNGS
Universidad Nacional de General Sarmiento

Aplicaciones y ejemplos del cálculo integral

Bottazzi, Tamara
Aplicaciones y ejemplos del cálculo integral / Tamara Bottazzi. - 1a ed. - Los Polvorines : Universidad Nacional de General Sarmiento, 2018.
Libro digital, PDF - (Textos básicos ; 24)

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-987-630-323-1

1. Cálculo Integral. I. Título.
CDD 515.43

J. M. Gutiérrez 1150, Los Polvorines (B1613GSX)
Prov. de Buenos Aires, Argentina
Tel.: (54 11) 4469-7507
ediciones@ungs.edu.ar
www.ungs.edu.ar/ediciones

Diseño gráfico de tapas: Daniel Vidable
Diagramación: hecho en Latex por Tamara Bottazzi
Corrección: Miriam S. Andiñach

Hecho el depósito que marca la ley 11.723.

L U A
Libro
Universitario
Argentino

Textos básicos

exactas

Aplicaciones y ejemplos del cálculo integral

Tamara P. Bottazzi

Ediciones UNGS

Universidad Nacional de General Sarmiento

Índice general

Agradecimientos

En primer lugar quisiera agradecer a Alejandro Varela y a Ariel Lombardi, que fueron los profesores que me ayudaron a mejorar en mis clases, he aprendido mucho de ellos y con ellos, tanto siendo alumna como ayudante de sus clases. También agradezco el trabajo que se tomó el profesor Gabriel Larotonda en leer estas notas y ayudarme a mejorarlas para entregarles esta nueva versión. También quisiera agradecer al director del Instituto de Ciencias, Mariano De Leo, quien apoyó e impulsó la iniciativa de publicar este libro que me ha llevado años construir.

A mi profesor y amigo Cristian Conde, que siempre me apoya y ayuda en todo lo que me propongo en esta, a veces dura, vida universitaria.

Finalmente debo mencionar que jamás hubiera podido terminar este libro sin el apoyo incondicional de mi familia: a ellos les estoy profundamente agradecida. Gracias León, Julián y mamá.

Y cómo olvidarme de agradecer a quienes les debo toda la imaginación posible en el momento de pensar ejemplos, los estudiantes: ellos han sabido padecerme y me han ayudado a ser mejor profesora, a entender sus dudas y valorar sus aciertos. Sus correcciones y miradas críticas de los ejemplos han sido fundamentales en la construcción de este libro. Este libro es por y para ellos.

Tamara, marzo de 2017.

Introducción

Estas notas (devenidas en libro para mi suerte) fueron creadas con el objetivo de complementar las clases de Matemática III y/o Cálculo en varias variables, materias obligatorias para los Profesorados en Matemática y Física y para las carreras de ingeniería de la Universidad Nacional de General Sarmiento. La idea es que los alumnos puedan utilizarlas para repensar las clases teóricas, así como también servirse de ejemplos para poder encarar la práctica.

Lo que estudiaremos aquí se articula y se apoya fuertemente en temas como: integración en una sola variable, propiedades de los números reales, análisis de funciones escalares y vectoriales, rectas, planos , diferenciación, entre otros temas. Gran parte de los contenidos se pueden profundizar con otros libros que cito en la bibliografía (aunque claro, no constituyen la única fuente de estudio). Recomiendo para esto Adams (2009), Apostol (2002) y Mardsen y Tromba (1991).

La motivación principal de lo que aparece aquí está fundada en las dudas que me fueron transmitiendo los alumnos durante estos años que estuve como docente, así como también mis propias dificultades y mis recuerdos de cuando debí atravesar estos contenidos, allá por el año 2005.

En este libro puse el acento en la construcción de diferentes tipos de gráficos, dado que gran parte de las dudas y dificultades que he observado en estos años ha sido en esta dirección. Por eso, he incluido muchos gráficos y hacia el final del libro se encuentran los comandos que se requieren para poder visualizarlos con el programa Mathematica.

Parte I

Integración en regiones del plano y del espacio

Capítulo 1

Regiones del plano y del espacio

En este capítulo centraremos la atención en visualizar regiones del plano y del espacio. Intentaremos dar caracterizaciones en cuanto a su forma y mostraremos cómo se puede extraer información de un gráfico aproximado a partir del análisis de las ecuaciones o inecuaciones que la describen. El objetivo es visualizar y describir analíticamente regiones sobre las que luego integraremos.

A lo largo de este libro consideraremos siempre $||\cdot||$ como la norma euclídea en $\mathbb{R}^n$, es decir

$$||x|| = ||(x_1, x_2, ..., x_n)|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}.$$

En primer lugar, introduciremos la definición de región acotada:

Definición 1.0.1. *Una región $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ se dice* ***acotada*** *si para todo $x \in A$ existe $M > 0$ tal que $||x|| \leq M$. Equivalentemente, A es una región acotada si y solo si puede encerrarse completamente por una bola de $\mathbb{R}^n$ con centro en el origen y de radio finito r.*

En particular, para $n = 2$ y $n = 3$ tenemos:

Definición 1.0.2. *Una región $D \subseteq \mathbb{R}^2$, se dice* ***acotada*** *si D puede encerrarse completamente por un disco de radio finito r.*

Definición 1.0.3. *Una región $W \subseteq \mathbb{R}^3$, se dice* ***acotada*** *si W puede encerrarse completamente por una esfera de $\mathbb{R}^3$ de radio finito r.*

Una cuestión muy importante en el momento de determinar regiones del plano y del espacio es tener en cuenta lo siguiente:

1) Para $\mathbb{R}^2$:

a) Una recta $y = mx + b$ divide al plano en dos semiplanos, a saber

$$\begin{cases} y \leq mx + b \\ y \geq mx + b. \end{cases} \tag{1.0.1}$$

b) Una curva del plano puede dividir a este en dos o más regiones, cada una posee una porción de esta misma curva como frontera. Un ejemplo de esto, además de la recta, es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, la cual divide al plano xy en dos regiones:

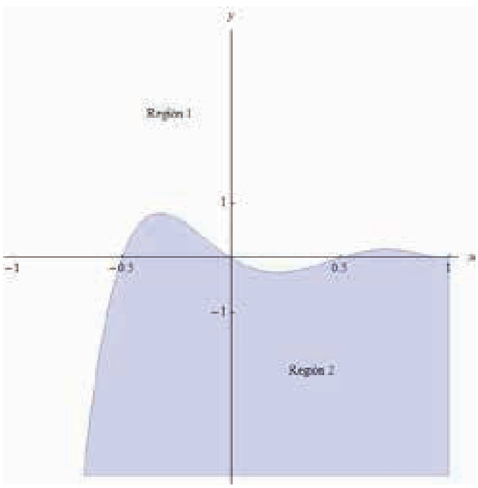
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases} \tag{1.0.2}$$

c) Dada una curva en el plano definida de forma implícita como $f(x, y) = cte$, si un punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ no se encuentra sobre dicha curva, entonces cumple que

$$f(x_0, y_0) < cte \vee f(x_0, y_0) < cte.$$

Es decir que se encuentra en alguna de las regiones determinadas por dicha curva. En el caso de la circunferencia, se puede apreciar que el $(0, 0)$ verifica la primera inecuación $0^2 + 0^2 = 0 \leq 1$, por lo cual indica que está en el disco de radio 1 y centro $(0, 0)$.

Figura 1.1: Regiones en las que queda dividido el plano real por una curva continua



2) Para $\mathbb{R}^3$:

a) Un plano $ax + by + cz = d$ divide al espacio en dos semiespacios, a saber

$$\begin{cases} z \leq \dfrac{d - (ax + by)}{c}, c \neq 0 \\ z \geq \dfrac{d - (ax + by)}{c}, c \neq 0 \end{cases} \tag{1.0.3}$$

b) Una superficie (luego definiremos este concepto con mayor precisión, pero por el momento se puede aceptar con algo de vaguedad que una superficie es una región del espacio de volumen igual a 0) en el espacio puede dividirlo en dos o más regiones, cada una posee a esta misma superficie como frontera. Un ejemplo de esto, además del plano, es la del paraboloide de ecuación $x^2 + y^2 = z$, que divide al espacio en dos regiones:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq z \\ x^2 + y^2 \geq z \end{cases} \tag{1.0.4}$$

c) Cualquier punto $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^2$ se encuentra en alguna de las regiones determinadas por una superficie continua, de modo que (x_0, y_0, z_0) debe verificar alguna de las dos inecuaciones. Aquella que verifique es la que corresponde a la región en la que se encuentra. En el caso del paraboloide, el punto $(0, 0, -1)$ verifica la segunda inecuación, ya que $0^2 + 0^2 = 0 \geq -1$, por lo tanto, se encuentra en la porción exterior del mismo.

Ahora basaremos el estudio sobre regiones acotadas, debido a que sobre ellas podremos calcular integrales múltiples.

1.1. Regiones de $\mathbb{R}^2$

Antes de pasar a los ejemplos, definiremos una clasificación de regiones que nos interesan porque luego podremos definir integrales dobles de cierto tipo de funciones sobre ellas.

Definición 1.1.1. *Las regiones elementales de $\mathbb{R}^2$ son de tres tipos posibles.*

1) ***Regiones de tipo I**: están definidas de la siguiente forma*

$$S = \{(x, y) : a \leq x \leq b\, ,\, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

con $g_1(x)$ y $g_2(x)$ funciones continuas de $[a, b]$ que cumplen que $g_1 \leq g_2, \forall x \in [a, b]$. Se puede notar que por ser continuas la región resulta acotada (ver figura 1.2a).

2) ***Regiones de tipo II**: están definidas de la siguiente forma*

$$S = \{(x, y) : c \leq y \leq d\, ,\, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

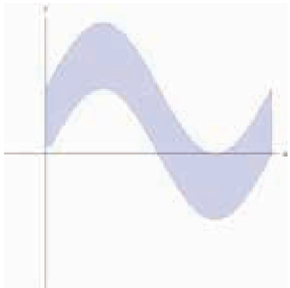
con $h_1(x)$ y $h_2(x)$ funciones continuas de $[c, d]$ que cumplen que $h_1 \leq h_2, \forall y \in [c, d]$. Se puede notar que por ser continuas la región resulta acotada (ver figura 1.2b).

3) ***Regiones de tipo III**: son las regiones que pueden expresarse como de tipo I o de tipo II a la vez. Por ejemplo $x^2 + y^2 \leq 1$ (ver figura 1.2c) o, simplemente, un rectángulo.*

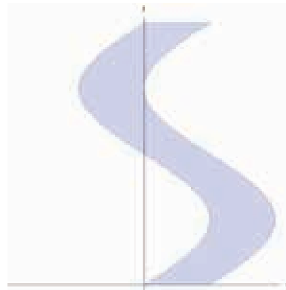
Observación 1.1.2. Todas las regiones que se considerarán en este libro serán de tipo I, II y III o se podrán descomponer en regiones de estos tipos.

Figura 1.2: Tipos de regiones en $\mathbb{R}^2$

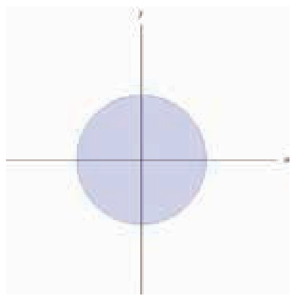
(a) Región de tipo I



(b) Región de tipo II



(c) Región de tipo III



1.1.1. Rectángulos

Este tipo de regiones planas son las más simples de describir y constituyen el primer ejemplo para entrar en el tema.

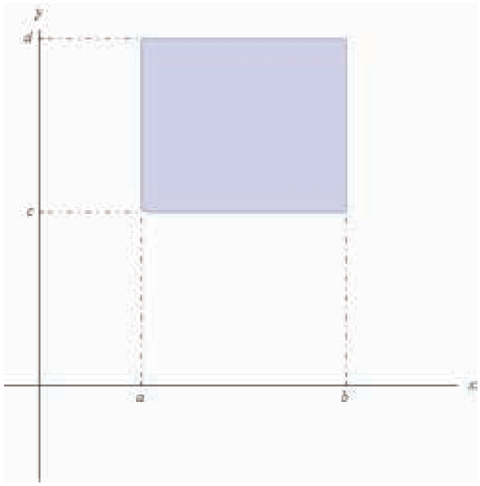
Definición 1.1.3. *Un* ***rectángulo*** *es una región plana definida entre dos pares de rectas paralelas y con cuatro ángulos rectos entre sí (es decir, las rectas que no son paralelas son perpendiculares entre sí).*

Los segmentos de las rectas que delimitan a la región rectangular, la cual es acotada (probarlo es tarea del lector), se llaman *lados del rectángulo*. Un rectángulo cuyos lados son paralelos a los ejes x e y del plano real se describe con las siguientes condiciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{array} \right. \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}. \tag{1.1.1}$$

Los rectángulos paralelos a los ejes x e y son regiones de tipo III, ya que pueden expresarse como regiones de tipo I o II (ver figura 1.3).

Figura 1.3: Rectángulo



1.1.2. Triángulos

Definición 1.1.4. *Un **triángulo** es una región plana acotada por tres segmentos de rectas que unen tres puntos no alineados.*

Al igual que con los rectángulos, los segmentos que delimitan a la región triangular se denominan *lados del triángulo*. Un triángulo que tiene un lado paralelo al eje y, como el de la figura 1.4, se puede describir de la siguiente manera :

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ l_1(x) \leq y \leq l_2(x) \end{cases} \quad a, b \in \mathbb{R}, \tag{1.1.2}$$

en la que l_1 y l_2 son funciones lineales.

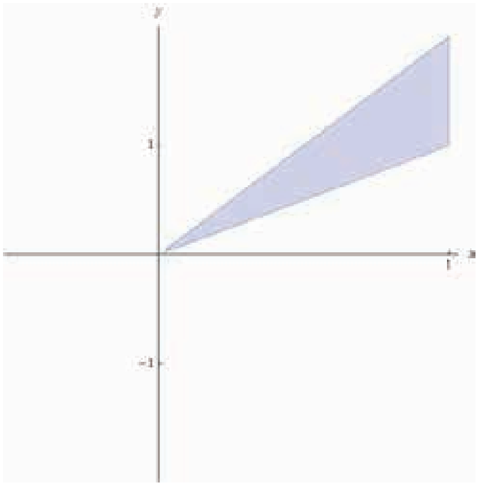
Se describe como una región de tipo I con simplicidad, teniendo en cuenta que l_1 y l_2 son dos rectas no paralelas al eje y. Si se quisiera expresar como una región de tipo II no sería tan fácil hacerlo como una única región (pues habría que considerar una función del tipo "módulo"), por lo que habría que dividirla en dos partes.

Análogamente, un triángulo que tiene un lado paralelo al eje x se puede describir como a continuación:

$$\begin{cases} a \leq y \leq b \\ l_1(y) \leq x \leq l_2(y) \end{cases} \quad a, b \in \mathbb{R}, \tag{1.1.3}$$

con l_1 y l_2 siendo funciones lineales de la variable y en este caso.

Figura 1.4: Triángulo



1.1.3. Paralelogramos

Definición 1.1.5. *Los **paralelogramos** son regiones planas definidas por dos pares de rectas paralelas dos a dos (ver figura 1.5).*

En general, si no hay ninguna recta vertical, se expresan como la región encerrada entre las siguientes rectas:

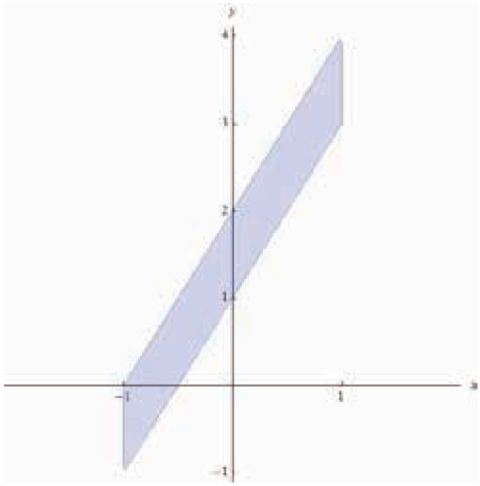
$$\begin{cases} y = ax + b \\ y = ax + c \\ y = dx + e \\ y = dx + f \end{cases} \quad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}\,,\; a \neq d\,,\; b \neq c\,,\; e \neq f. \tag{1.1.4}$$

La misma región también puede ser descripta con desigualdades, aprovechando el hecho de que se trata de una región encerrada entre dos pares de rectas paralelas. Si $b < c$ y $e < f$:

$$\begin{cases} b \leq y - ax \leq c \\ e \leq y - dx \leq f \end{cases} \tag{1.1.5}$$

Este tipo de regiones en principio solo son elementales, si las rectas resultan paralelas a los ejes x o y, es decir, si el paralelogramo es un rectángulo. Para los otros casos, hay que considerar una partición de la región en otras dos o tres elementales (un rectángulo y dos triángulos, por ejemplo). Aquí no profundizaremos en esto, debido a que en el siguiente capítulo veremos un método muy útil para expresar este tipo de regiones sin subdividirlas, que implica hacer un cambio de variables. Para lo próximo, resulta muy útil la descripción de la región hecha como en (1.1.5).

Figura 1.5: Paralelogramo



1.1.4. Discos

En primer lugar, debemos definir el disco unitario centrado en el origen. Luego, siguiendo la deducción planteada en el Apéndice A para circunferencias, definiremos discos más generales. La idea es que un disco de radio r es la unión infinita de todas las circunferencias de radio menor o igual que r concéntricas entre sí y con el disco (esto es, tienen el mismo centro que el disco).

Definición 1.1.6. *El **disco unitario** con centro en $(0,0)$ es una región plana conformada por los puntos que verifican una inecuación de la forma*

$$x^2 + y^2 \leq 1. \tag{1.1.6}$$

Su gráfico es el de la figura 1.6.

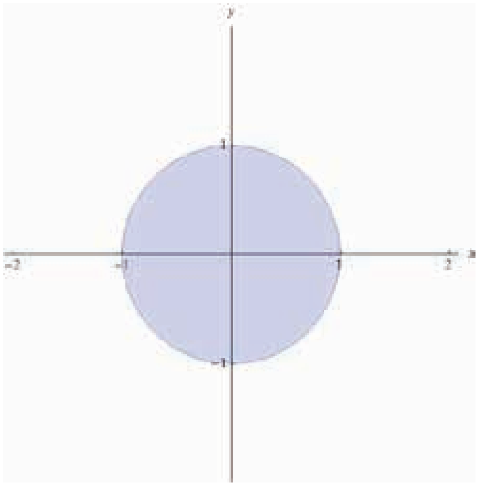
El disco unitario es una región de tipo III. Por su gráfico, se puede decir que $-1 \leq x \leq 1$, dado que 1 es el radio máximo del disco. Además, de la inecuación que define al disco pueden obtenerse los límites entre los que se mueve la variable y:

$$x^2 + y^2 \leq 1 \Rightarrow y^2 \leq 1 - x^2 \Rightarrow |y| \leq \sqrt{1-x^2} \Rightarrow -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}.$$

Esta última desigualdad muestra que la variable y está limitada por dos funciones de x que son las dos semicircunferencias unitarias. Finalmente, expresado como región de tipo II, el disco unitario queda definido por:

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \end{cases} \tag{1.1.7}$$

Figura 1.6: Disco unitario con centro en el origen



Ejercicio 1.1.7. Describir el disco unitario como una región de tipo II. (Sugerencia: seguir la deducción hecha para expresarlo como de tipo I).

Definición 1.1.8. *Los **discos** son regiones planas conformadas por los puntos que verifican una inecuación de la forma*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2 \tag{1.1.8}$$

(x_0, y_0) *se denomina **centro del disco** y* $r \geq 0$ *es el **radio**.*

Vale la pena aclarar que cualquier disco de radio r finito es una región acotada, ya que puede encerrarse por sí misma (un disco de radio mayor o igual que r).

En analogía con la idea planteada para el disco unitario, los discos en general son regiones de tipo III y pueden ser expresados de la siguiente manera (su gráfico puede ser como el de la figura 1.7):

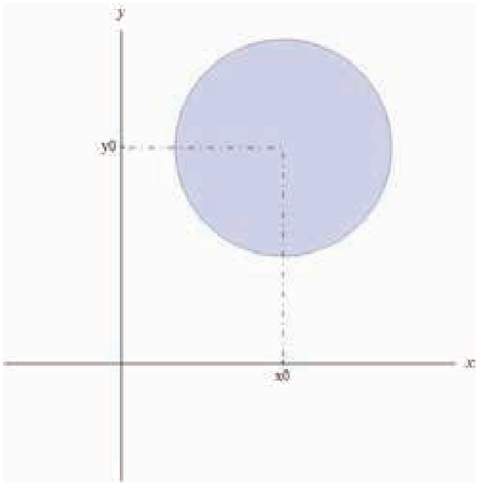
$$\begin{cases} -r + x_0 \leq x \leq r + x_0 \\ -\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2} + y_0 \leq y \leq \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2} + y_0 \end{cases} \tag{1.1.9}$$

Queda para el lector realizar la deducción de estas inecuaciones.

1.1.5. Discos elípticos

En el Apéndice A desarrollaremos la noción de puntos que conforman una elipse, como un caso más general y que contiene a las circunferencias. Del mismo modo, se puede pensar a los discos elípticos como generalizaciones de los discos circulares, en los que ya el radio no es constante. En primer lugar, tomando la definición de elipse con centro en el $(0, 0)$, a continuación definimos el disco elíptico con el mismo centro.

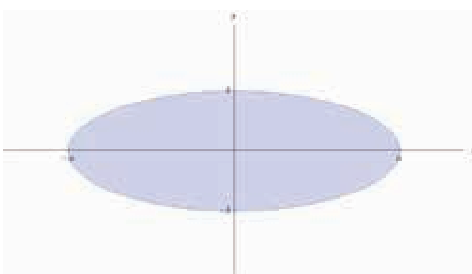
Figura 1.7: Disco $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2$



Definición 1.1.9. *El **disco elíptico** con centro en $(0,0)$ es una región plana conformada por los puntos que verifican una desigualdad de la forma*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, \text{ con } a, b \in \mathbb{R},\ a > 0\,, b > 0. \tag{1.1.10}$$

Figura 1.8: Disco elíptico $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$



El disco elíptico es una región de tipo III. Por su gráfico, que es el correspondiente a la figura 1.8, se puede decir que $-a \leq x \leq a$, dado que a es el radio máximo respecto del eje x. Además, de la inecuación que define al disco elíptico pueden obtenerse los límites entre los que se

mueve la variable y:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1 \Rightarrow y^2 \leq b^2.(1-\frac{x^2}{a^2}) \Rightarrow |y| \leq \sqrt{b^2.(1-\frac{x^2}{a^2})}$$

$$\Rightarrow -\sqrt{b^2.(1-\frac{x^2}{a^2})} \leq y \leq \sqrt{b^2.(1-\frac{x^2}{a^2})}$$

$$\Rightarrow -b.\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \leq y \leq b.\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,.$$

Esta última inecuación muestra que la variable y está limitada por dos funciones de x que son las dos semielipses. Finalmente, expresado como región de tipo II, el disco elíptico queda definido por:

$$\begin{cases} -a \leq x \leq a \\ -b.\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \leq y \leq b.\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \end{cases} \tag{1.1.11}$$

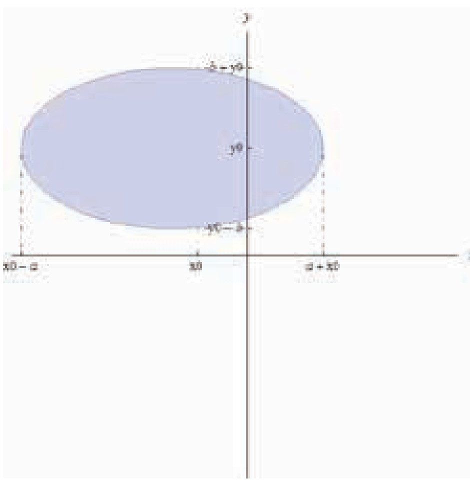
Ejercicio 1.1.10. Describir el disco elíptico como una región de tipo II. (Sugerencia: seguir la deducción hecha para expresarlo como de tipo I).

Definición 1.1.11. *Los **discos elípticos** son regiones planas conformadas por los puntos que verifican una inecuación de la forma*

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}\leq 1. \tag{1.1.12}$$

(x_0, y_0) *se denomina **centro del disco elíptico**.*

Figura 1.9: Disco elíptico $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}\leq 1$



Vale la pena aclarar que cualquier disco elíptico es una región acotada, ya que puede encerrarse por un disco de radio mayor o igual que $\max\{a, b\}$ (esto es, el máximo entre los valores a y b).
Si $a = b = r$, entonces, es un disco de radio r, es decir que el disco es un caso particular del disco elíptico.

Los discos elípticos con cualquier centro (x_0, y_0) son regiones de tipo III y pueden ser expresados de la siguiente manera:

$$\begin{cases} -a + x_0 \le x \le a + x_0 \\ -b.\sqrt{1 - \dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}} + y_0 \le y \le b.\sqrt{1 - \dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}} + y_0 \end{cases} \tag{1.1.13}$$

Queda para el lector realizar la deducción de estas inecuaciones.

Definición 1.1.12. *Las **regiones hiperbólicas** son regiones planas conformadas por los puntos que verifican una inecuación de la forma*

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} \le d\,,\; d \in \mathbb{R}. \tag{1.1.14}$$

o de la forma

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} \ge d\,,\; d \in \mathbb{R}. \tag{1.1.15}$$

Cabe destacar la necesidad de definir dos tipos de estas regiones, puesto que las mismas están determinadas por las curvas hiperbólicas (ver los gráficos en Apéndice A). Para poder graficar alguna de estas regiones hiperbólicas, nos conviene pensar en un ejemplo:

Ejemplo 1.1.13. Graficar las regiones

$$D_1 = \left\{(x, y) : \; x^2 - y^2 \le 1\,, -1 \le y \le 1\right\} \text{ y}$$

$$D_2 = \left\{(x, y) : \; x^2 - y^2 \ge 1\,, -1 \le y \le 1\right\}.$$

Además, describir analíticamente a la región D_1.

Si tomamos el gráfico de la curva $x^2 - y^2 = 1$ (ver nuevamente el Apéndice A) y observamos que:

- La curva es una unión de dos curvas o ramas disjuntas, así que el plano queda dividido en tres porciones.
- $(0, 0)$ verifica la desigualdad de D_1.
- $(0, 0)$ no verifica la desigualdad de D_1, en tanto $(2, 0)$ y $(-2, 0)$ sí.

Figura 1.10: Región dada por $x^2 - y^2 \leq 1, -1 \leq y \leq 1$

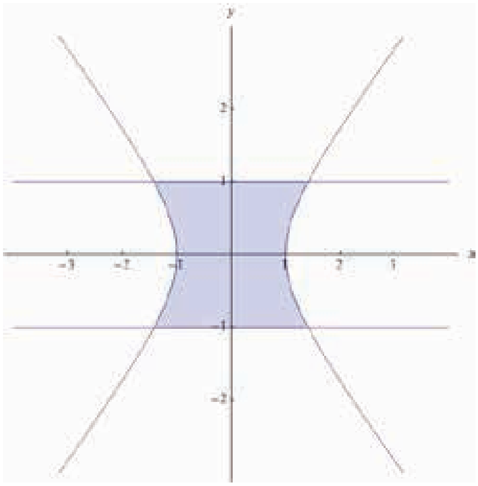
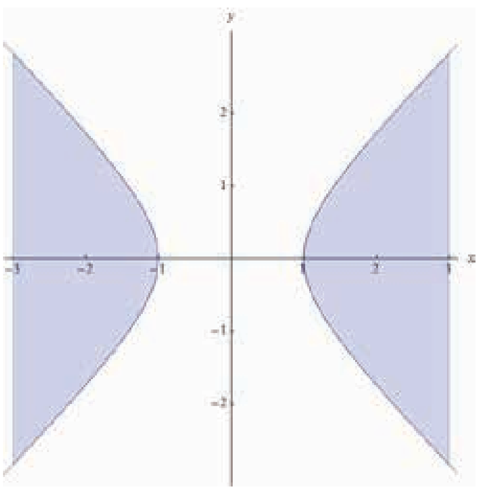


Figura 1.11: Región dada por $x^2 - y^2 \geq 1, -1 \leq y \leq 1$



Entonces nos queda que D_1 es el de la figura 1.10, en tanto el de D_2 es el de la figura 1.11.

Para describir D_1 viendo su gráfico, podemos hacerlo de la siguiente manera:

$$\begin{cases} -1 < y < 1 \\ -\sqrt{1+y^2} \leq x \leq \sqrt{1+y^2} \end{cases} \tag{1.1.16}$$

donde la última desigualdad sale de despejar a x de la desigualdad $x^2 - y^2 \leq 1$.

Corresponde destacar que en el ejemplo anterior no se pidió expresar a D_2 analíticamente por el simple hecho de que es una región formada por dos subregiones disjuntas (es decir que su intersección es vacía).

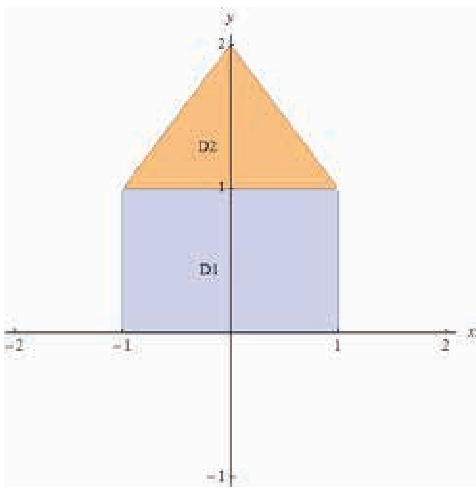
Podríamos enunciar una forma general de expresar analíticamente a regiones hiperbólicas no disjuntas, pero parece más complicado y poco útil en términos de lo que veremos en el transcurso de estos capítulos. Por lo pronto, tenemos la descripción de este ejemplo que hicimos previamente.

1.1.6. Regiones mixtas o más generales

En esta sección presentamos algunos ejemplos a modo ilustrativo. Se espera que le sirvan al lector para poder encarar muchos de los ejemplos que aparecerán en el transcurso de su aprendizaje.

Ejemplo 1.1.14. Expresar de forma analítica la región sombreada de la figura 1.12.

Figura 1.12: Región del ejemplo 1.1.14



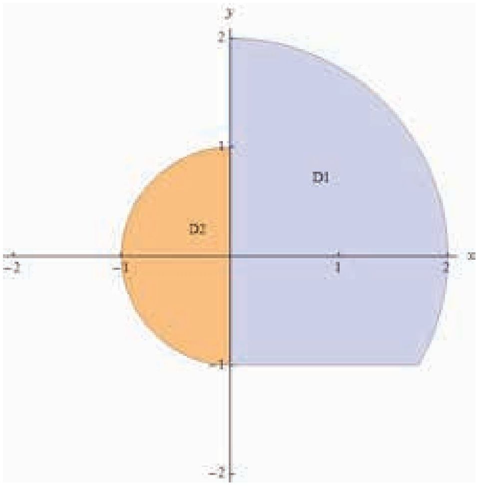
Esta región se puede dividir en dos mediante la recta $y = 1$, quedando dos regiones: D_1 es un rectángulo y D_2 es un triángulo. Cada una de ellas es una región elemental.

$$D_1 = \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases} \quad D_2 = \begin{cases} 1 \leq y \leq 2 \\ y - 2 \leq x \leq 2 - y \end{cases}$$

Se puede observar que D_1 está expresada como de tipo I o II (recordar que es indistinto en el caso de un rectángulo), en tanto D_2 se encuentra descripta como de tipo II. Claro que esta no es la única forma de expresar a esta región, solo es una posibilidad.

Ejemplo 1.1.15. Expresar de forma analítica las dos regiones sombreadas D_1 y D_2 de la figura 1.13.

Figura 1.13: Regiones del ejemplo 1.1.15



En ambos casos se trata de porciones de discos con centro en $(0,0)$, pero en un caso es de radio 1 y en el otro de radio 2. Podemos expresarlas de la siguiente manera:

$$D_1 = \begin{cases} -1 & \leq y \leq 2 \\ 0 & \leq x \leq \sqrt{4-y^2} \end{cases} \quad D_2 = \begin{cases} -1 & \leq y \leq 1 \\ -\sqrt{1-y^2} & \leq x \leq 0 \end{cases}$$

Esto sale de pensar D_1 como una región de tipo II, sabiendo que entonces y se mueve entre más y menos el radio (que es 2) y x se mueve desde el eje y hasta la circunferencia de radio 2. Para D_2 se utiliza la misma idea que para D_1 teniendo en cuenta que y ahora no toma valores negativos.

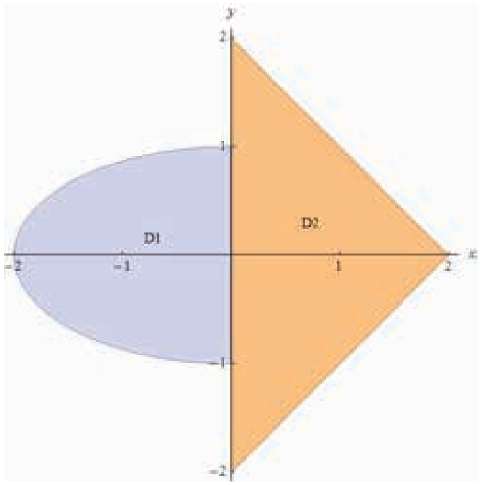
Ejemplo 1.1.16. Expresar de forma analítica la región sombreada de la figura 1.14.

La región sombreada, al igual que en el primer ejemplo, no resulta ser una región elemental. Mas si se la divide con la recta vertical $x=0$ y se consideran las regiones D_1 y D_2, resulta que la primera es un semidisco elíptico con radio máximo $a=2$, radio mínimo $b=1$ y centro en el origen, en tanto la segunda es un triángulo. Teniendo esta división en cuenta, las semirregiones que componen la región sombreada nos quedan definidas por:

$$D_1 = \begin{cases} -1 & \leq y \leq 1 \\ 2\sqrt{1-y^2} & \leq x \leq 0 \end{cases} \text{ y } D_2 = \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ x-2 \leq y \leq 2-x \end{cases}$$

Ejercicio 1.1.17. Decidir qué tipo de regiones son, en cada caso, D_1 y D_2. Luego, tratar de expresar la misma región sombreada de otra manera.

Figura 1.14: Regiones del ejemplo 1.1.16



1.2. Regiones de $\mathbb{R}^3$

Así como en el plano definimos las regiones elementales, en el espacio también lo haremos.

Definición 1.2.1. *Una región de $\mathbb{R}^3$ se dice* ***elemental*** *si una variable puede expresarse en función de las otras dos, la segunda variable en función de la tercera y la tercera es independiente, es decir:*

$$W_1 = \begin{cases} a \leq x \leq b \\ t_1(x) \leq y \leq t_2(x) \\ r_1(x,y) \leq z \leq r_2(x,y) \end{cases} \quad W_2 = \begin{cases} a \leq x \leq b \\ s_1(x) \leq z \leq s_2(x) \\ u_1(x,z) \leq y \leq u_2(x,z) \end{cases}$$

$$W_3 = \begin{cases} e \leq z \leq f \\ v_1(z) \leq y \leq v_2(z) \\ w_1(z,y) \leq x \leq w_2(z,y) \end{cases},$$

son solo algunos tipos posibles de regiones. En el caso de la región W_1, se puede definir la región observando primero su sombra en el plano xy. Distinto es en el caso de la región W_2, la cual se puede definir observando su sombra en el plano xz. En el caso de la región W_3, se la puede definir observando su sombra en el plano yz.

Se puede notar que la definición es análoga en tres variables a la hecha para regiones planas en la sección anterior. Para estas regiones descriptas definiremos luego las integrales triples o iteradas.

En el caso de la región W_1, su sombra sobre el plano xy ($z = 0$) será la región plana D_1,

Figura 1.15: Región W_1

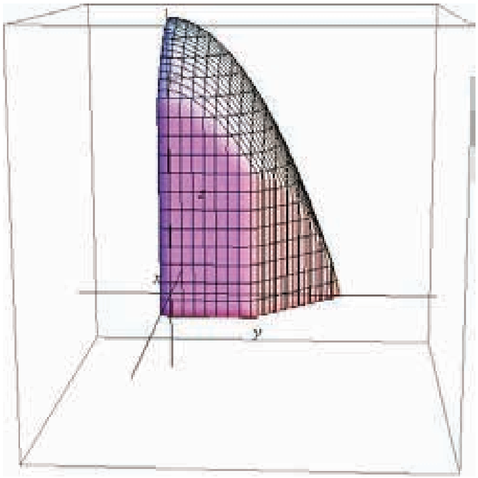
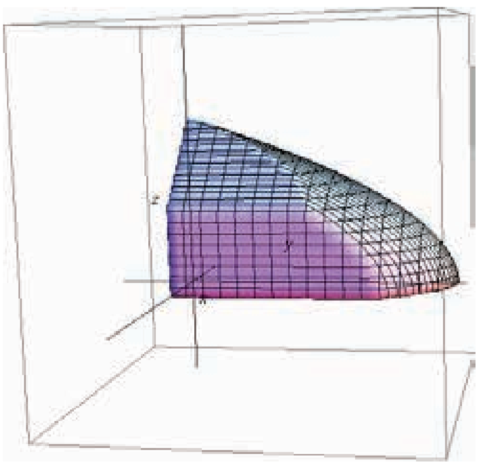


Figura 1.16: Región W_2

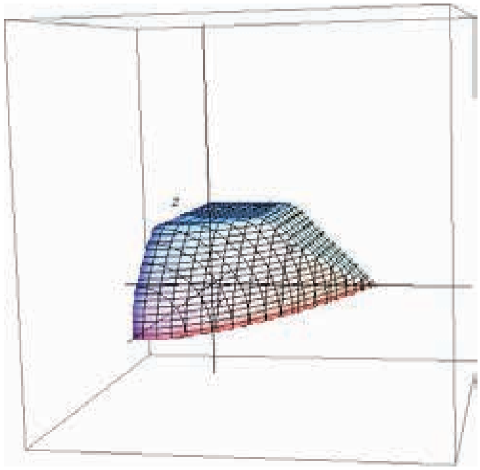


descripta como de tipo I en $\mathbb{R}^2$:

$$D_1 = \begin{cases} a \leq x \leq b \\ t_1(x) \leq y \leq t_2(x). \end{cases}$$

En el caso de la región W_2, su sombra sobre el plano xz ($y = 0$) será la región plana D_2,

Figura 1.17: Región W_3



descripta como de tipo I en $\mathbb{R}^2$:

$$D_2 = \begin{cases} a \leq x \leq b \\ s_1(x) \leq z \leq s_2(x). \end{cases}$$

En el caso de la región W_3, su sombra sobre el plano yz ($x = 0$) será la región plana D_3, descripta como de tipo I en $\mathbb{R}^2$:

$$D_3 = \begin{cases} a \leq x \leq b \\ v_1(z) \leq y \leq v_2(y). \end{cases}$$

1.2.1. Paralelepípedos

Son las regiones acotadas del espacio más elementales, en las que su borde o límite está conformado por rectángulos paralelos de a dos. Su definición será ya su descripción analítica

Definición 1.2.2. *Un **paralelepípedo** es un conjunto de puntos de $\mathbb{R}^3$ que verifica tres desigualdades como las siguientes:*

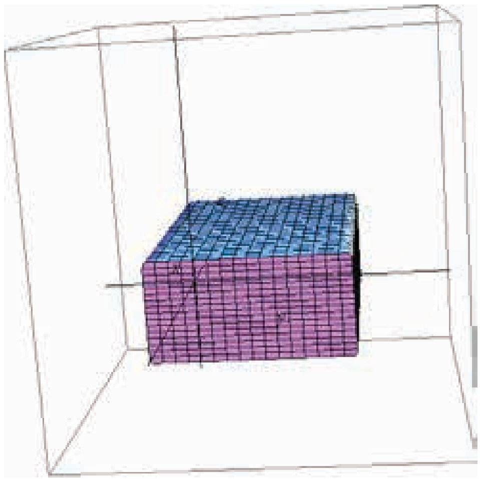
$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \\ e \leq z \leq f \end{cases} \quad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}. \tag{1.2.1}$$

Se puede observar que un paralelepípedo es una especie de unión infinita de rectángulos.

1.2.2. Poliedros

En este libro solo trabajaremos con tetraedros, paralelepípedos, pirámides y pirámides truncadas. No vamos a trabajar en profundidad con las propiedades de los poliedros, así co-

Figura 1.18: Paralelepípedo



mo tampoco otras clases distintas de poliedros. [1]

Definición 1.2.3. *Un **poliedro** es un cuerpo del espacio tal que su frontera (su borde) consta de un número finito de polígonos (regiones planas de n lados, por ejemplo, triángulos con $n = 3$, rectángulos $n = 4$ y pentágonos $n = 5$).*

De los paralelepípedos ya se ha hablado en la sección anterior, por lo cual ahora se centrará la atención en otros poliedros.

Definición 1.2.4. *Un **tetraedro** es un poliedro de cuatro caras triangulares. Si las cuatro caras son triángulos equiláteros, se dice que el tetraedro es regular. Su gráfico es similar al del de la figura 1.19.*

Es decir que el tetraedro está limitado por porciones planas triangulares que corresponden a tres planos distintos del espacio, que no son paralelos. Una forma de expresar analíticamente este lugar geométrico es mediante inecuaciones lineales, como se puede apreciar en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2.5. La región del primer octante acotada superiormente por el plano $x+y+z = 2$ es un tetraedro.

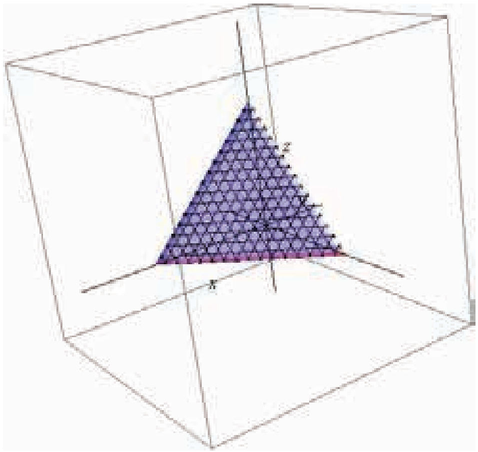
En efecto, podemos expresarla como conjunto de la siguienta manera:

$$T = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \leq 2\,; x, y, z \geq 0\right\}.$$

Para graficarla, hay que ubicar primero el plano $x + y + z = 2$, para lo cual se necesitan solo tres puntos que estén en él, por ejemplo $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 0, 2)$ (verificar que estén en

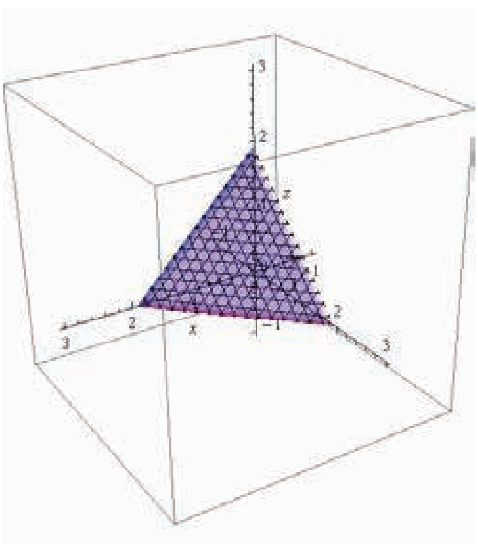
[1] Si el lector se encuentra interesado, puede consultar Pogorelov, 1980 [[7], p.175]

Figura 1.19: Tetraedro



dicho plano). Estos puntos resultan útiles para graficar el plano, ya que no están alineados y se encuentran sobre los ejes x, y, z, respectivamente. Luego, se consideran los puntos por debajo de este plano y sobre el primer octante, es decir, cuando los valores de x, y, z son mayores o iguales a 0.

Figura 1.20: Tetraedro $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \, x+y+z \leq 2\,; x,y,z \geq 0\}$



Para describirla como región elemental, podemos observar su gráfico y notar que la base de este tetraedro es su sombra en el plano $z = 0$. Esta sombra es un triángulo en dicho plano, más específicamente es la región descripta como

$$\begin{cases} 0 & \leq x \leq 2 \\ 0 & \leq y \leq 2 - x. \end{cases}$$

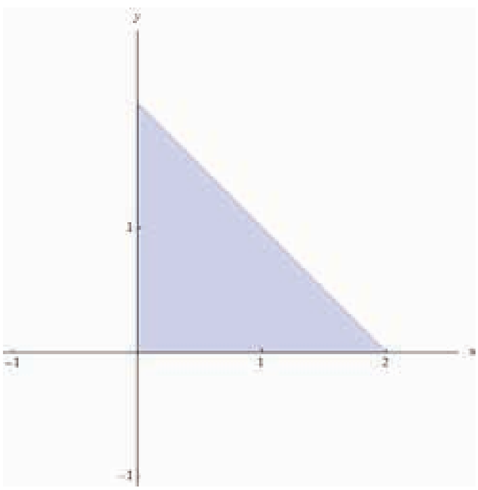
Con esto, lo único que nos falta es decir cómo está condicionada la variable z y tendremos a la región expresada como de tipo I. Podemos notar del gráfico de la región (figura 1.20) que la tercera variable es mayor o igual que 0. Además, tenemos que

$$x + y + z \leq 2 \Rightarrow z \leq 2 - x - y,$$

donde la igualdad $x + y + z = 2$ corresponde a un plano, así que la desigualdad es un semiespacio (el que contiene al punto $(0, 0, 0)$, ya que este verifica la desigualdad). De modo que "el piso" es $z = 0$ y "el techo" es $z = 2 - x - y$. Entonces, T queda expresada como región elemental de la siguiente manera

$$T = \begin{cases} 0 & \leq x \leq 2 \\ 0 & \leq y \leq 2 - x \\ 0 & \leq z \leq 2 - x - y. \end{cases}$$

Figura 1.21: Sombra en $z = 0$ del Tetraedro $x + y + z \leq 2, x, y, z \geq 0$



Claro que esta forma de expresarla no es única, pero queda para el lector el ejercicio de pensar en otras formas.

1.2.3. Cilindros rectos

Sean π y π' dos planos paralelos y $\mathbb{L}$ una recta que los corta. Se toma una curva α en π y se traza una recta $\mathbb{L}_a$ que pase por un punto a de la curva y que sea paralela a $\mathbb{L}$. Se hace lo mismo para todo punto a de esa curva. Si la curva es cerrada, por ejemplo una circunferencia, se hace lo mismo para todos los puntos que se encuentran en la región interior plana de la cual la curva α es frontera. La región determinada por los segmentos entre los dos planos, paralelos a $\mathbb{L}$ se denomina *cilindro*. La recta $\mathbb{L}$ será su eje de simetría (o será paralela a este). El gráfico es como el de la figura 1.22. Si $\mathbb{L}$ es perpendicular a los planos π y π' se dice que el cilindro es recto (ver figura 1.23). En lo que siga, solo consideraremos cilindros rectos.

Figura 1.22: Cilindro no recto

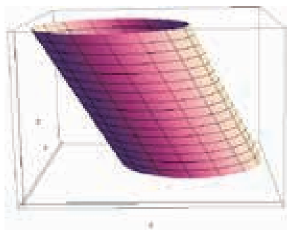
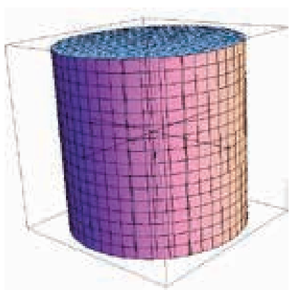


Figura 1.23: Cilindro recto



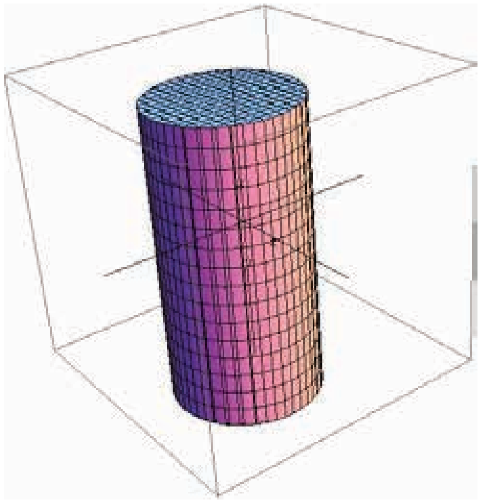
Otra definición bastante general de este tipo de cuerpos y que sirve a los objetivos de lo que estudiaremos, es aquella que alude a que un cilindro es una región del espacio tal que una de las tres variables, x, y o z, es independiente de las otras dos. Para clarificar mejor esto, ofrecemos una clasificación de algunos de los cilindros que más utilizaremos.

Definición 1.2.6. *Un **cilindro circular** con eje de simetría paralelo al eje z es una región definida por*

$$W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2, a \leq z \leq b\right\}. \qquad (1.2.2)$$

$$r > 0,\, a \leq b$$

Figura 1.24: Cilindro $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2$



En este caso, la curva α es la circunferencia $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ y los planos paralelos son $z = a$ y $z = b$.
Del mismo modo, pueden pensarse cilindros circulares que tengan su eje de simetría paralelo a los ejes x o y, pero le dejamos al lector planteado el siguiente ejercicio.

Ejercicio 1.2.7. Describir analíticamente dos cilindros circulares que tengan sus ejes de simetría paralelos a los ejes x e y, según cada caso. Luego graficarlos.

Para poder representar una porción de cilindro circular, la descripción analítica deberá tener otras inecuaciones, como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2.8.

$$W = \left\{(x, y, y) \in \mathbb{R}^3 :\, x^2 + y^2 \leq 36, -x \leq y \leq x\right\}.$$

En este caso, W es un cilindro circular de radio 6 con eje de simetría $(0, 0, z)$, aunque no es todo el cilindro, sino que es una mitad de él, ya que la segunda inecuación restringe a los discos que lo componen. Observar que no se trata de una región acotada, ya que la variable z no está acotada superiormente. Si quisiéramos describir analíticamente a esta región, podemos ver que su sombra D en el plano $z = 0$ es un cuarto de disco de radio 6 y centro $(0, 0, 0)$ (ver

Figura 1.25: Cilindro $x^2 + y^2 \leq 36, -x \leq y \leq x$

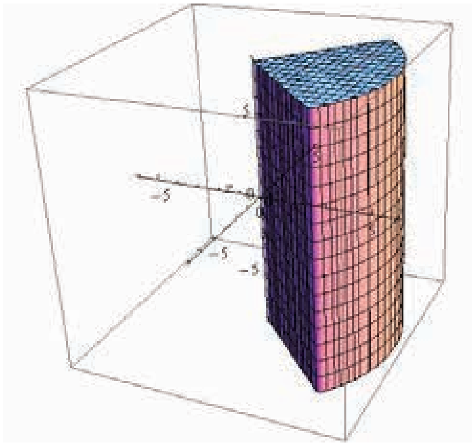


figura 1.26), que se puede describir como

$$D = \begin{cases} -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \leq y \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ |y| & \leq x \leq \sqrt{36 - x^2}. \end{cases}$$

Dado que la condición $-x \leq y \leq x$ es equivalente a $|y| \leq x$. Queda determinar los límites de z, pero como no es acotada $-\infty < z < \infty$, así que W nos queda descripta como:

$$W = \begin{cases} -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \leq y \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ |y| & \leq x \leq \sqrt{36 - x^2} \\ -\infty & < z < \infty. \end{cases}$$

Definición 1.2.9. *Siguiendo la misma idea anterior, un* ***cilindro elíptico*** *con eje de simetría paralelo al eje z es una región definida por*

$$W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} \leq 1, c \leq z \leq d\right\}, \qquad (1.2.3)$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $c < d$ y $a, b > 0$.

En este caso, la curva α es la elipse $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$ y los planos paralelos son $z = c$ y $z = d$. La sombra de este tipo de cilindros en el plano xy es la elipse $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} +$

Figura 1.26: Sombra en $z = 0$ del Cilindro $x^2 + y^2 \leq 36, -x \leq y \leq x$

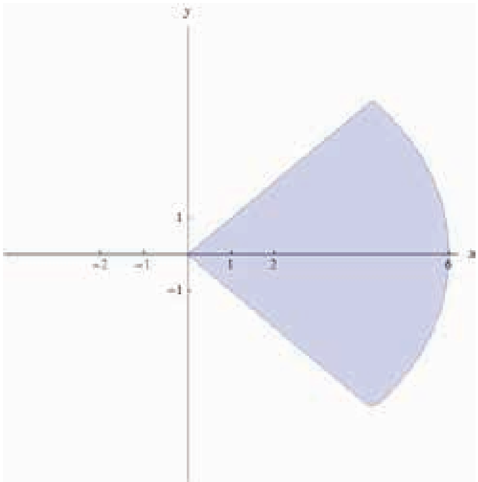
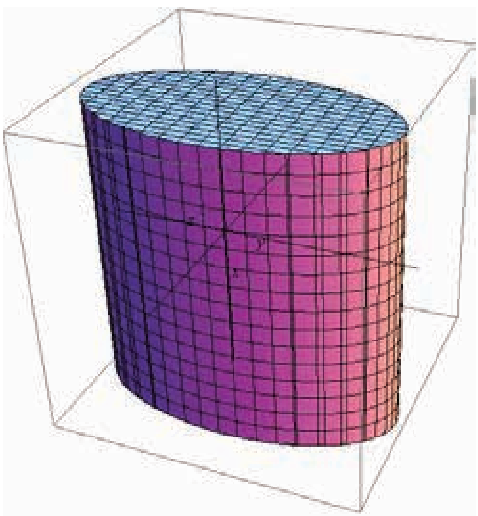


Figura 1.27: Cilindro elíptico $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} \leq 1, c \leq z \leq d$



$\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} \leq 1$, que se puede describir como en la ecuación (1.1.11). De modo que W queda

descripta como:

$$W = \begin{cases} -a \leq x \leq a \\ -b.\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \leq y \leq b.\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \\ c \leq z \leq d. \end{cases}$$

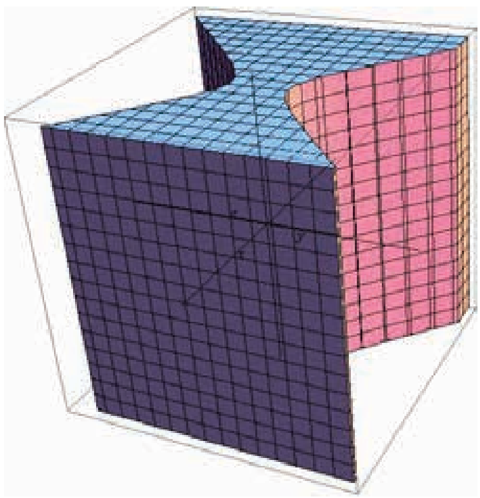
Ejercicio 1.2.10. Describir analíticamente dos cilindros elípticos que tengan sus ejes de simetría paralelos a los ejes x e y, según cada caso. Luego graficarlos.

Definición 1.2.11. *Siguiendo la misma idea anterior, un* ***cilindro hiperbólico*** *con eje de simetría paralelo al eje z es una región definida por*

$$W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 \leq a^2, b \leq z \leq c\right\}, \quad (1.2.4)$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $b < c$.

Figura 1.28: Cilindro hiperbólico $(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 \leq a^2, b \leq z \leq c$



En este caso, la curva α es la hipérbola $(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 = a^2$ y los planos paralelos son $z = b$ y $z = c$.
Lo que hay que tener en cuenta en este caso es que no se trata de una región acotada, dado que la curva $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$ no es una curva cerrada, como lo son las elipses.
Ilustramos esto con un ejemplo.

Ejemplo 1.2.12. Graficar y describir la región W determinada como:

$$W = \left\{(x, y, z) : x^2 - y^2 \leq 1 \,,\, -1 \leq y \leq 1 \,,\, -1 \leq z \leq 1\right\}.$$

Al olvidarnos momentáneamente de z, en el plano xy tenemos una región plana hiperbólica como las que vimos en la primera sección. Las desigualdades

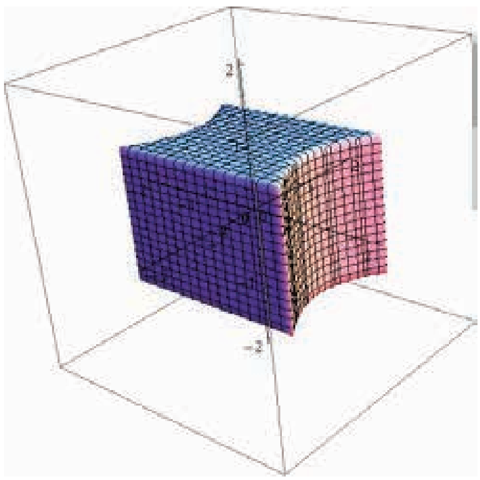
$$x^2 - y^2 \leq 1 \text{ y } -1 \leq y \leq 1$$

determinan la región de la figura 1.10. Esta región está descripta por la ecuación (1.1.16). Para cada $z \in [-1, 1]$ tenemos esa misma región plana, entonces la descripción de la región es

$$\begin{cases} -1 < y < 1 \\ -\sqrt{1+y^2} \leq x \leq \sqrt{1+y^2} \\ -1 \leq z \leq 1. \end{cases}$$

y su gráfico es el de la figura 1.29.

Figura 1.29: Cilindro hiperbólico $x^2 - y^2 \leq 1\,,\ -1 \leq y \leq 1\,,\ -1 \leq z \leq 1$



Ejercicio 1.2.13. Describir analíticamente dos cilindros hiperbólicos que tengan sus ejes de simetría paralelos a los ejes x e y, según cada caso.

Definición 1.2.14. *Un **cilindro parabólico** con eje de simetría paralelo al eje z es una región definida por*

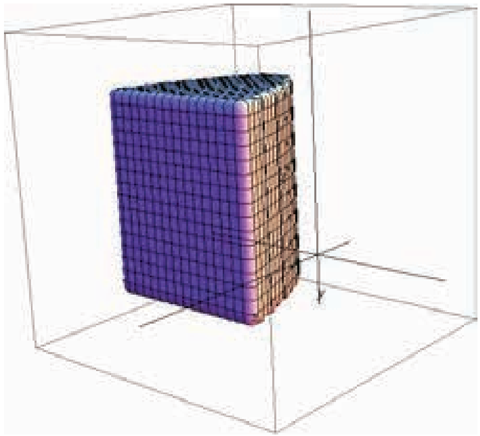
$$W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ a.(x - x_0)^2 + b \leq y, c \leq z \leq d\right\}, \qquad (1.2.5)$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $c < d$.

En este caso, la curva α es la parábola $a.(x - x_0)^2 + b = y$, así como los planos paralelos son $z = c$ y $z = d$.

Ejercicio 1.2.15. Describir analíticamente dos cilindros parabólicos que tengan sus ejes de simetría paralelos a los ejes x e y, según cada caso. Luego graficarlos.

Figura 1.30: Cilindro parabólico $a.(x-x_0)^2+b \leq y, c \leq z \leq d$



Ejemplo 1.2.16. Graficar y describir la región

$$W = \left\{(x,y,z):\ z \geq y^2\,, 0 \leq x \leq 2\,, z \leq 4\right\}.$$

Analicemos esto lo más desmenuzadamente posible.

- En este caso nos conviene observar que la desigualdad $z \geq y^2$ no depende de x, esto nos dice que para cada $x \in [0,2]$ tenemos esa desigualdad. La igualdad $z = y^2$ es una parábola en el plano yz, de modo que la desigualdad será alguna de las dos regiones en las que esa curva divide al plano. En este caso, será la que contenga al punto $(y,z) = (0,1)$ pues este verifica la desigualdad $z \geq y^2$.
- La condición $z \leq 4$, condiciona superiormente a este cilindro parabólico, pero también condiciona a lo ancho, a la variable y pues:

$$z = y^2 \leq 4 \Rightarrow |y| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq y \leq 2.$$

Entonces, la región W tiene sombra de gráfico como en la figura 1.31 en el plano yz, gráfico como el de la figura 1.32 y se describe como

$$\begin{cases} -2 & < y < 2 \\ 0 & \leq x \leq 2 \\ y^2 & \leq z \leq 4. \end{cases}$$

Observación 1.2.17 (Sobre cómo graficar cilindros)**.** Si la región está dada en forma analítica, lo que conviene es ir considerando las inecuaciones que la definen fijando alguna variable. Por

Figura 1.31: Sombra en el plano yz de $z \geq y^2\,, 0 \leq x \leq 2\,, z \leq 4$

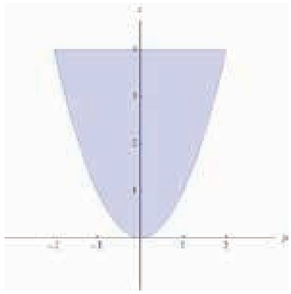
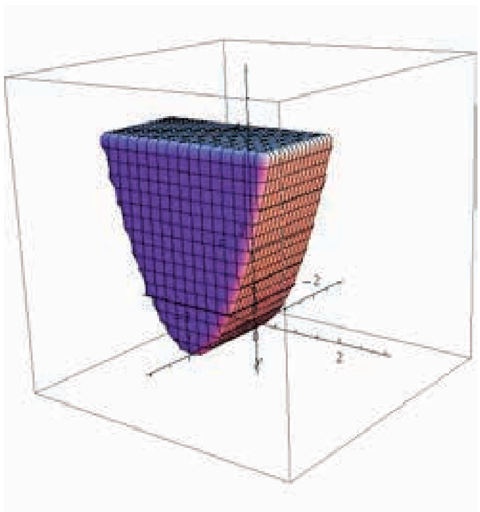


Figura 1.32: Cilindro $z \geq y^2\,, 0 \leq x \leq 2\,, z \leq 4$



ejemplo, si se toma la siguiente región,

$$W = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{(x-2)^2 + (y+1)^2 \leq 4}_{\text{in. } 1}, \underbrace{-2 \leq z \leq 3}_{\text{in. } 2} \right\},$$

conviene realizar la siguiente tabla:

1) Si $z = 0$ se cumple la in. 2 y no influye en la in. 1 $\Rightarrow$ queda determinado un disco de radio 2 con centro en $(2, -1, 0)$ (el centro tiene una variable más ya que es un disco en $\mathbb{R}^3$) en el plano $z = 0$.

2) Si $z = 1$ se cumple la in. 2 y no influye en la in. 1 $\Rightarrow$ queda determinado un disco de radio 2 con centro en $(2, -1, 1)$ en el plano $z = 1$.

3) Si $z = -1$ se cumple la in. 2 y no influye en la in. 1 $\Rightarrow$ queda determinado un disco de radio 2 con centro en $(2, -1, -1)$ en el plano $z = -1$.

4) Si $z = z_0$, $\forall -2 \leq z_0 \leq 3$ se cumple la in. 2 y no influye en la in. 1 $\Rightarrow$ queda determinado un disco de radio 2 con centro en $(2, -1, z_0)$ en el plano $z = z_0$.

De esto se concluye que se tiene para cada z o altura que verifica la in. 1 un disco del mismo radio y centro, pero a distinta altura, es decir que la región es una unión infinita de discos centrados en $(2, -1, z)$. En otras palabras, se tiene un cilindro circular con eje de simetría $\mathbb{L} : X = \lambda.(0, 0, 1) + (2, -1, 0)$ (es la ecuación paramétrica de la recta que es paralela al eje z y que pasa por los centros de los discos).

Figura 1.33: Cortes de la región W de tipo $z = cte$

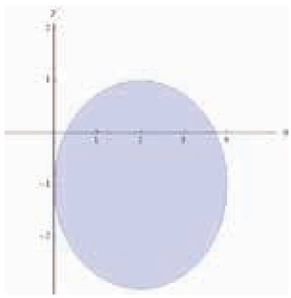
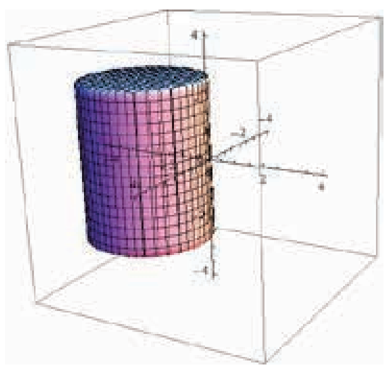


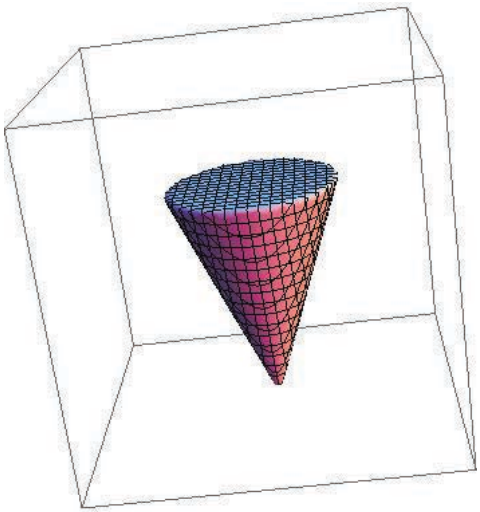
Figura 1.34: Cilindro $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 \leq 4, -2 \leq z \leq 3$



1.2.4. Conos

Sean π un plano y p un punto no contenido en π. Se toma una curva α en π y se traza una recta $\mathbb{L}_a$ que pase por un punto a de la curva y por p. Se hace lo mismo para todo punto a de esa curva (que pase por cada a de la curva y por p). Si la curva es cerrada, por ejemplo una circunferencia, se hace lo mismo para todos los puntos que se encuentran en la región interior plana de la cual la curva α es frontera. La región determinada por los segmentos entre el plano π y el punto p se denomina *cono*. La región interior plana que tiene a α como frontera se llama *base del cono*, en tanto al punto p se lo denomina *vértice*. A modo de ejemplo mostramos la figura 1.35. En el transcurso de este texto focalizaremos el trabajo con conos tales que α sea una curva

Figura 1.35: Cono



cerrada (su punto inicial y final son el mismo), en particular una elipse. Además, tendremos en cuenta aquellos conos elípticos tales que el punto de la región de la base que está más cercano a p sea el centro de la elipse (en vocabulario de álgebra lineal, que la proyección ortogonal de p en la base del cono sea el centro de la elipse).

Puntualmente analizaremos los siguientes tipos de conos.

Definición 1.2.18. *Un* ***doble cono circular*** *con eje de simetría paralelo al eje z es una región definida por*

$$W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \, (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq (z - z_0)^2, a \leq z \leq b\right\}, \, a \leq b. \tag{1.2.6}$$

Es un caso particular del doble cono elíptico. En este caso ya no es tan simple determinar cuál es la curva y cuál es el vértice, o al menos no a simple vista. Para poder visualizar mejor este tipo de regiones se puede ver primero un caso particular:

Ejemplo 1.2.19. Considerar la región de $\mathbb{R}^3$, dada por:

$$W = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2 + y^2 \leq z^2}_{\text{in. 1}}, \underbrace{-1 \leq z \leq 1}_{\text{in. 2}} \right\}.$$

Para analizar qué tipo de región y esbozar un gráfico de la misma se procederá a realizar cortes de las región fijando variables, es decir, se cortará la región con planos:

1) Si $z = 0$ se cumple la in. 2 y la in. 1 queda $x^2 + y^2 \leq 0$, lo cual implica necesariamente $x^2 + y^2 = 0$ y de lo cual se deduce que esto se cumple si y solo si $x = y = 0$. Es decir que cuando corto con el plano $z = 0$ la región es un único punto: $(0, 0, 0)$

2) Si $z = 1$ se cumple la in. 2 y la in. 1, queda $x^2 + y^2 \leq 1$. Por lo tanto, queda determinado un disco de radio 1 con centro en $(0, 0, 1)$ en el plano $z = 1$.

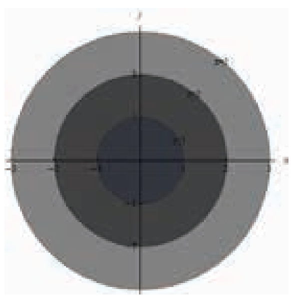
3) Si $z = -1$ se cumple la in. 2 y la in. 1, queda $x^2 + y^2 \leq 1$. Por lo tanto, queda determinado un disco de radio 1 con centro en $(0, 0, 1)$ en el plano $z = -1$.

4) Si $z = z_0$, $\forall -1 \leq z_0 \leq 1$ se cumple la in. 2 y la in. 1, queda $x^2 + y^2 \leq z_0^2$. Por lo tanto, queda determinado un disco de radio z_0 con centro en $(0, 0, z_0)$ en el plano $z = z_0$.

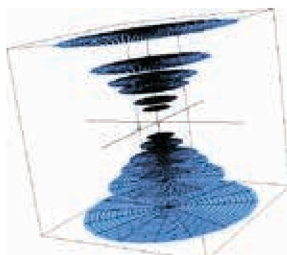
Este primer análisis arroja la información de que la región es una unión infinita de discos con centro en el eje z y de radios entre 0 y 1 (ver figuras 1.36a y 1.36b). A diferencia del caso del

Figura 1.36: Cortes de W en el plano y el espacio.

(a) Cortes de la región W de tipo $z = cte$ vistos en el plano



(b) Cortes de la región W de tipo $z = cte$ vistos en el espacio



cilindro, en el cual los discos que lo formaban tenían todos el mismo radio, en este caso habrá que ver cómo es el crecimiento de esos discos. Para ello, se cortará ahora con planos $x = cte$, $y = cte$:

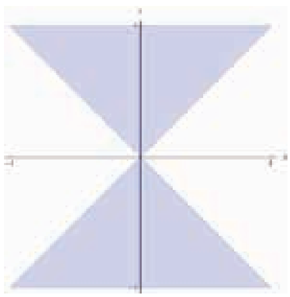
1) Si $x = 0$ la in. 1 queda: $y^2 \leq z^2$. Para hacer más simple la interpretación de este corte se considerará en lugar de la desigualdad la igualdad, es decir, $y^2 = z^2$, de la cual se deduce que $|y| = |z| \Rightarrow y = \pm z$, que son la recta identidad y menos la identidad del

plano yz (el plano $x = 0$). Volviendo a la desigualdad, como los puntos $(0, 1)$ y $(0, -1)$ del plano yz la verifican (ya que $0^2 \leq 1^2$ y $0^2 \leq (-1)^2$), se puede deducir que la región plana que se encuentra en la región W es la de la figura 1.37a.

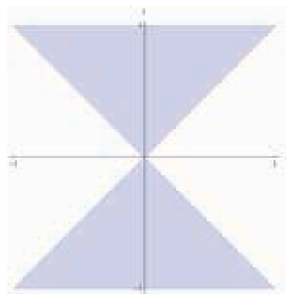
2) Si $y = 0$ la in. 1 queda: $x^2 \leq z^2$. Para hacer más simple la interpretación de este corte se considerará en lugar de la desigualdad la igualdad, es decir, $x^2 = z^2$, de la cual se deduce que $|x| = |z| \Rightarrow x = \pm z$, que son la recta identidad y menos la identidad del plano xz(el plano $y = 0$). Volviendo a la desigualdad, como los puntos $(0, 1)$ y $(0, -1)$ del plano xz la verifican (ya que $0^2 \leq 1^2$ y $0^2 \leq (-1)^2$), se puede deducir que la región plana que se encuentra en la región W es la de la figura 1.37b.

Figura 1.37: Cortes de W en el distintos planos

(a) Corte de la región W en $x = 0$



(b) Corte de la región W en $y = 0$



Esto muestra que el crecimiento de los discos es lineal y que la región es un cono doble con eje de simetría $(0, 0, z)$. Combinando, los gráficos 1.36a, 1.37a y 1.37b, el gráfico de la región W es el de la figura 1.38.

Con respecto a su descripción analítica, su sombra en el plano xy es el disco unitario de centro $(0, 0)$, lo cual sería simple de describir y ya lo hemos hecho en casos anteriores. El problema es que a z no le podremos poner un único límite superior e inferior, por lo que se hace necesario para describir a la región separarla en dos subregiones. El doble cono pensado así no es una región elemental pero sí es unión de regiones elementales, que son los conos simples que quedan de separar según $z \geq 0$ o $z \leq 0$:

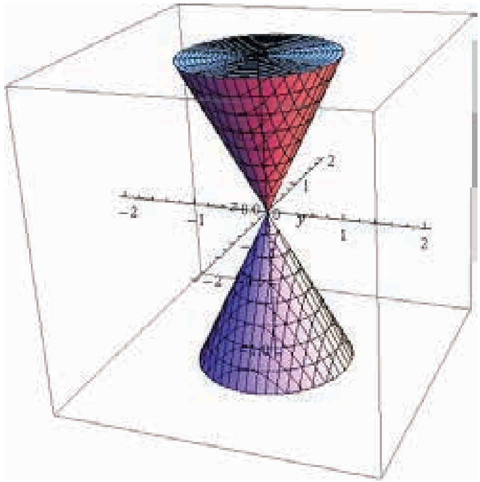
$$x^2 + y^2 \leq z^2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \leq |z| \Rightarrow -\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}.$$

De modo que W_1 y W_2 (conos simples superior e inferior, respectivamente) quedan descriptas como:

$$W_1 = \begin{cases} -1 & \leq y \leq 1 \\ -\sqrt{1 - y^2} & \leq x \leq \sqrt{1 - y^2} \\ \sqrt{x^2 + y^2} & \leq z \leq 1 \end{cases} \text{ y } W_2 = \begin{cases} -1 & \leq y \leq 1 \\ -\sqrt{1 - y^2} & \leq x \leq \sqrt{1 - y^2} \\ -1 & \leq z \leq -\sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$$

entonces, $W = W_1 \cup W_2$ y se describe por partes.

Figura 1.38: Cono $x^2 + y^2 \leq z^2$, $-1 \leq z \leq 1$



En este ejemplo, la curva α de la definición es la definida por $x^2 + y^2 = 1$. De ahora en más, no diremos cuál es la curva α, dado que en muchos casos hay conos en los que ni siquiera está definida (por ejemplo, si el cono no está acotado).

Para el análisis con cortes $x = cte$ e $y = cte$ no tomamos otros valores más que $x = 0$ e $y = 0$, ya que estos resultan suficientes para tener una idea aproximada del tipo de región y poder esbozar un gráfico. La clave de que estos cortes elegidos fueran suficiente para determinar a la región es que $(0, 0)$ es el centro de cada disco que conforma la región para cada corte de z. Esta idea sirve para graficar un doble cono circular mediante el siguiente proceso.

Observación 1.2.20. Sean $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}$ fijos y W la siguiente región:

$$W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \, (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq (z - z_0)^2, a \leq z \leq b\right\}.$$

1) Si $z = z_0$ y si se cumple la in. 2, la in. 1 queda $x^2 + y^2 \leq 0$, lo cual implica necesariamente $x^2 + y^2 = 0$ y de lo cual se deduce que esto se cumple si y solo si $x = y = 0$. Es decir que cuando corto con el plano $z = z_0$ la región es un único punto: (x_0, y_0, z_0).

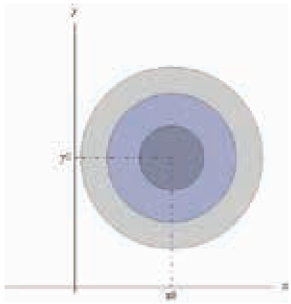
2) Si $z = a$ se cumple la in. 2 y la in. 1 queda $x^2 + y^2 \leq (a - z_0)^2$. Por lo tanto, queda determinado un disco de radio $|a - z_0|$ con centro en (x_0, y_0, a) en el plano $z = a$.

3) Si $z = b$ se cumple la in. 2 y la in. 1 queda $x^2 + y^2 \leq (b - z_0)^2$. Por lo tanto, queda determinado un disco de radio $|b - z_0|$ con centro en (x_0, y_0, b) en el plano $z = b$.

4) Si $z = z_1$, $\forall -1 \leq z_1 \leq 1$ se cumple la in. 2 y la in. 1 queda $x^2 + y^2 \leq (z_1 - z_0)^2$. Por lo tanto, queda determinado un disco de radio $|z_1 - z_0|$ con centro en (x_0, y_0, z_1) en el plano $z = z_1$.

Este primer análisis arroja la información de que la región es una unión infinita de discos con centro en una recta paralela al eje z y de radios entre a y b (ver figura 1.39).

Figura 1.39: Cortes de la región W de tipo $z = cte$



Para ver cómo es el crecimiento de estos discos, se cortará ahora con planos $x = cte$, $y = cte$:

1) Si $x = x_0$ la in. 1 queda $(y - y_0)^2 \leq (z - z_0)^2$. Para hacer más simple la interpretación de este corte, se considerará en lugar de la desigualdad la igualdad, es decir $(y-y_0)^2 = (z - z_0)^2$, de la cual se deduce que $|y - y_0| = |z - z_0| \ \Rightarrow y - y_0 = \pm z$, que son como la recta identidad y menos la identidad del plano $x = x_0$, pero trasladadas tal que la intersección de estas sea el punto (y_0, z_0). Volviendo a la desigualdad, como los puntos $(y_0, z_0 + 1)$ y $(y_0, z_0 - 1)$ del plano $x = x_0$ la verifican (ya que $0^2 \leq 1^2$ y $0^2 \leq (-1)^2$), se puede deducir que la región plana que se encuentra en la región W es la de la figura 1.40a.

2) Si $y = y_0$ la in. 1 queda $(x - x_0)^2 \leq (z - z_0)^2$. Para hacer más simple la interpretación de este corte, se considerará en lugar de la desigualdad la igualdad, es decir $(x-x_0)^2 = (z - z_0)^2$, de la cual se deduce que $|x - x_0| = |z - z_0| \ \Rightarrow y - y_0 = \pm z$, que son como la recta identidad y menos la identidad del plano $y = y_0$, pero trasladadas tal que la intersección de estas sea el punto (x_0, z_0). Volviendo a la desigualdad, como los puntos $(x_0, z_0 + 1)$ y $(x_0, z_0 - 1)$ del plano $y = y_0$ la verifican (ya que $0^2 \leq 1^2$ y $0^2 \leq (-1)^2$), se puede deducir que la región plana que se encuentra en la región W es la de la figura 1.40b.

Estos cortes se ven como en las figuras 1.40a y 1.40b

Del mismo modo, pueden pensarse conos circulares que tengan su eje de simetría paralelo a los ejes x o y, pero se deja al lector planteado esto como ejercicio.

Ejercicio 1.2.21. Describir analíticamente a dos conos circulares que tengan sus ejes de simetría paralelos a los ejes x e y, según cada caso. Luego graficarlos.

Figura 1.40: Cortes de W en el distintos planos

(a) Corte de la región W en $x = x_0$

(b) Corte de la región W en $y = y_0$

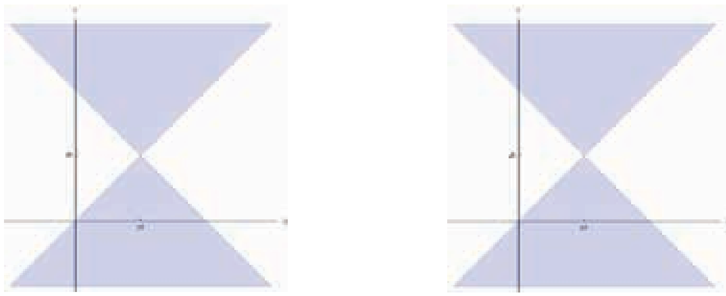
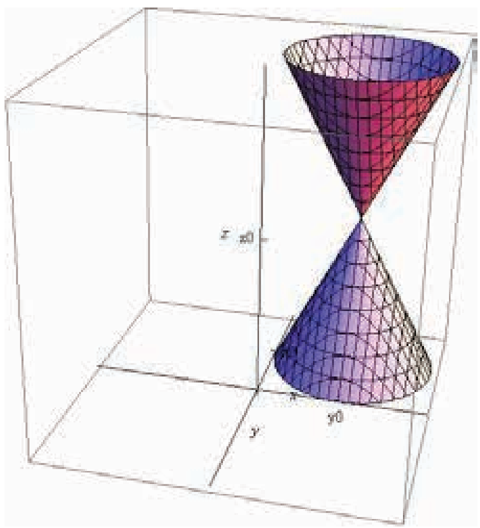


Figura 1.41: Cono $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq (z - z_0)^2, a \leq z \leq b$



Para poder representar una porción de doble cono circular, la descripción analítica deberá tener otras inecuaciones, como en los siguientes ejemplos:

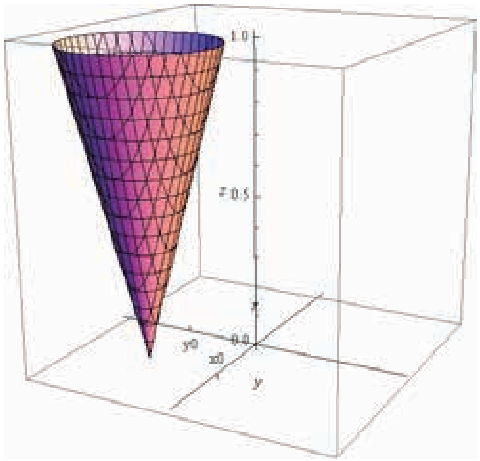
Ejemplo 1.2.22.

$$W = \left\{(x, y, y) \in \mathbb{R}^3 : \ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq z^2, 0 \leq z\right\}.$$

En este caso, W es un cono simple (la rama positiva del doble) con eje de simetría (x_0, y_0, z). Observar que no se trata de una región acotada, ya que la variable z no está acotada superior-

mente. Su gráfico es la figura 1.42.

Figura 1.42: Cono $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq z^2, z \geq 0$



Ejemplo 1.2.23.

$$W = \left\{(x, y, y) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \geq z^2\right\}.$$

En este caso, W es la parte exterior de un doble cono con eje de simetría $(0, 0, z)$. Observar que no se trata de una región acotada, ya que ninguna de las tres variables lo está. Su gráfico es la figura 1.43.

Ejemplo 1.2.24.

$$W = \left\{(x, y, y) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \leq z, z \leq 10\right\}.$$

En este caso, W es un cono simple (la rama positiva del doble) con eje de simetría $(1, 0, z)$, ya que si elevo al cuadrado a ambos lados de la desigualdad (recordar que esto se puede hacer porque para $t \geq 0$, $f(t) = t^2$ resulta una función monótona creciente),

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2}^2 \leq z^2 \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 \leq z^2,$$

y queda la inecuación original de un doble cono, aunque la condición inicial $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} \leq z$ implica que $z \geq 0$, ya que $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} \geq 0$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Observar que se trata de una región acotada, ya que la variable z queda determinada como $0 \leq z \leq 10$. Su gráfico es la figura 1.44.

Para describirla como región elemental, conviene mirar su sombra en el plano $z = 0$, que es el disco descripto por $(x-1)^2 + y^2 \leq 10^2$ (que surge de reemplazar con $z = 10$ en la desigualdad $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} \leq z$ y luego elevar al cuadrado), que es de radio 10 y centro

Figura 1.43: Región $x^2 + y^2 \geq z^2$

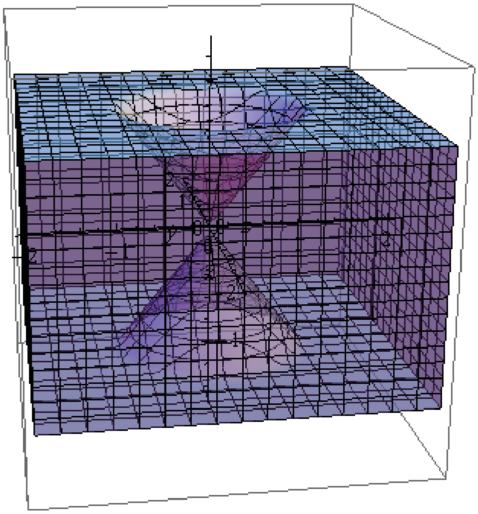
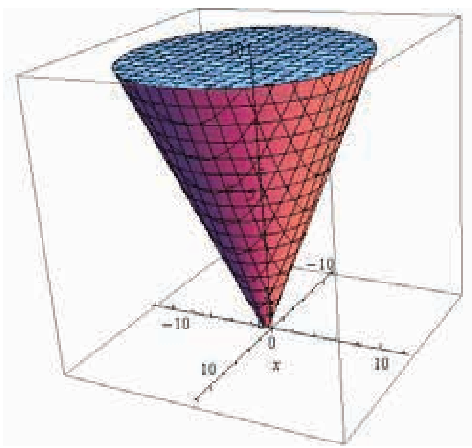
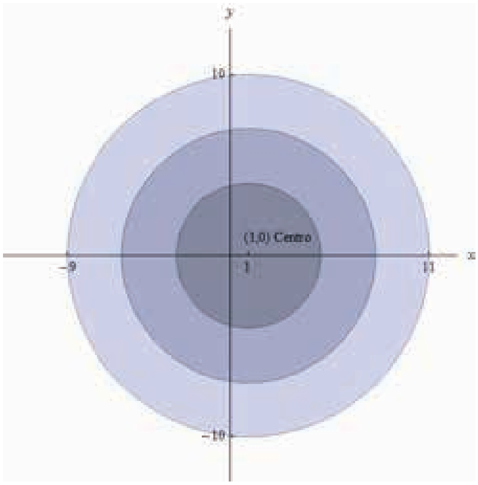


Figura 1.44: Cono $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} \leq z \leq 10$



$(1, 0, 0)$. Describiendo a esta sombra y teniendo en cuenta que z luego tiene como “piso” el cono y como “techo” el plano $z = 10$, la región queda descripta como sigue.

Figura 1.45: Sombra en el plano $z = 0$ del cono $\sqrt{(x-1)^2+y^2} \leq z, z \leq 10$



$$W = \begin{cases} -10 & \leq x \leq 10 \\ 1-\sqrt{100-x^2} & \leq y \leq 1+\sqrt{100-x^2} \\ \sqrt{(x-1)^2+y^2} & \leq z \leq 10. \end{cases}$$

Ejemplo 1.2.25.

$$W = \left\{(x,y,y) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \leq z, z \leq 10, 0 \leq x \leq y\right\}.$$

Al igual que en el ejemplo anterior, las primeras dos condiciones establecen que se trata de un cono simple acotado z entre 0 y 10, aunque la tercera condición impone que se tome de cada disco solamente un cuarto, aquel correspondiente al primer cuadrante (pensando en el plano xy, para lo cual se puede volver a repasar la sección 1.1.4). Su gráfico es la figura 1.46.

Su sombra en el plano xy es un octavo del disco de radio 10 de centro en el origen, su gráfico es el correspondiente al de la figura 1.47. Para describir esa región, conviene mirarla como de tipo I en el plano, porque se puede visualizar mejor que y varía "desde" la recta identidad "hasta" la circunferencia de radio 10. Como $x \geq 0$, lo único que queda es determinar el límite superior constante de x, para lo cual consideremos en el gráfico de la región el triángulo rectángulo de vértices $(0,0)$, (a,a), $(a,0)$. Lo que queremos averiguar es el valor de a, para lo cual planteamos lo siguiente: partiendo del hecho de que el ángulo α vale $\frac{\pi}{4}$ (ver figura 1.47)

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{a}{10} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{10} \Rightarrow a = 5\sqrt{2}.$$

Entonces,

$$W = \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \leq x \leq 5\sqrt{2} \\ x & \leq y \leq \sqrt{100 - x^2} \\ \sqrt{x^2+y^2} & \leq z \leq 10. \end{array} \right.$$

Figura 1.46: Cono $\sqrt{x^2+y^2} \leq z, z \leq 10, 0 \leq x \leq y$

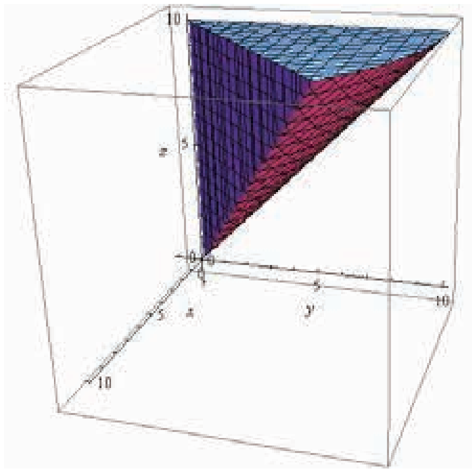
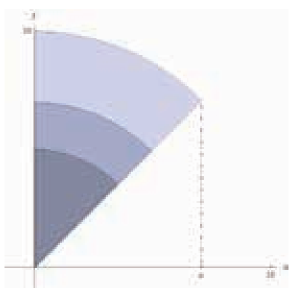


Figura 1.47: Sombra en $z = 0$ del Cono $\sqrt{x^2+y^2} \leq z, z \leq 10, 0 \leq x \leq y$

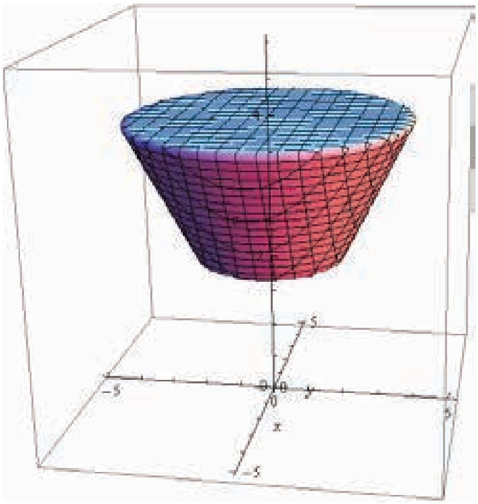


Ejemplo 1.2.26.

$$W = \left\{ (x, y, y) \in \mathbb{R}^3 : \, x^2 + y^2 \leq z^2, 2 \leq z \leq 4 \right\}.$$

En este caso, W es la porción interior de un cono con eje de simetría $(0,0,z)$. Es una región que se denomina *cono truncado*. Observar que no se trata de una región acotada, ya que ninguna de las tres variables lo está. Su gráfico es la figura 1.48.

Figura 1.48: Cono $x^2+y^2 \leq z^2, 2 \leq z \leq 4$



Para poder describir analíticamente a esta región se nos hace casi necesario separarla en dos regiones que sean elementales, como por ejemplo el cilindro interno definido como

$$W_1 = \left\{(x,y,y) \in \mathbb{R}^3 : \, x^2+y^2 \leq 2^2, 2 \leq z \leq 4\right\}$$

y la porción

$$W_2 = \begin{cases} 4 \leq x^2+y^2 \leq 16 \\ \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 4. \end{cases}$$

Si describimos a W_1 y W_2 entonces estaremos describiendo a W. Como W_1 es un cilindro y W_2 está casi descripta de forma analítica, queda como ejercicio para el lector.

Definición 1.2.27. *Siguiendo la idea anterior, un* ***doble cono elíptico*** *con eje de simetría paralelo al eje z es una región definida por*

$$W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \, \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} \leq (z-z_0)^2, c \leq z \leq d\right\}, \qquad (1.2.7)$$

con $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, $c < d$ y $a,b > 0$.

Ejemplo 1.2.28. Graficar la siguiente región de $\mathbb{R}^3$:

$$W = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq z^2}_{\text{in. 1}}, \underbrace{0 \leq z \leq 4}_{\text{in. 2}} \right\}.$$

En este caso $a = 2$ y $b = 3$. Para analizar qué tipo de región y esbozar un gráfico de la misma se hará el procedimiento de cortar la región con planos especiales:

1) Si $z = 0$ se cumple la in. 2 y la in. 1 queda $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 0$, que implica necesariamente $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 0$ y de lo cual se deduce que esto se cumple si y solo si $x = y = 0$. Es decir que cuando corto con el plano $z = 0$ la región es un único punto: $(0,0,0)$.

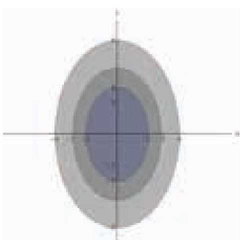
2) Si $z = 1$ se cumple la in. 2 y la in. 1 queda $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1 \Rightarrow$ queda determinada una elipse con centro en $(0,0,1)$ en el plano $z = 1$, de radios $a = 2$ y $b = 3$.

3) Si $z = 4$ se cumple la in. 2 y la in. 1 queda $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 4^2$, es decir, $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{144} \leq 1 \Rightarrow$ $\frac{x^2}{8^2} + \frac{y^2}{12^2} \leq 1$ queda determinada una elipse con centro en $(0,0,4)$ en el plano $z = 4$, de radios $a = 8$ y $b = 12$.

Este primer análisis informa que la región es una unión infinita de elipses con centro en el eje z (ver la figuras 1.49a y 1.49b).

Figura 1.49: Cortes de W en el plano y el espacio

(a) Cortes de la región W de tipo $z = cte$



(b) Cortes de la región W de tipo $z = cte$ vistos en el espacio



Se cortará ahora con planos $x = cte$, $y = cte$:

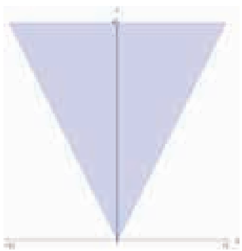
1) Si $x = 0$ la in. 1 queda $\frac{y^2}{9} \leq z^2$. Para hacer más simple la interpretación de este corte se considerará en lugar de la desigualdad la igualdad, es decir $\frac{y^2}{9} = z^2$, de la cual se

deduce que $|y| = 9.\,|z| \;\Rightarrow y = \pm 9.z$. Volviendo a la desigualdad, como los puntos $(0,1)$ y $(0,-1)$ del plano yz la verifican (ya que $0^2 \leq 9{,}1^2$ y $0^2 \leq 9.(-1)^2$), se puede deducir que la región plana que se encuentra en la región W es la de la figura 1.50a.

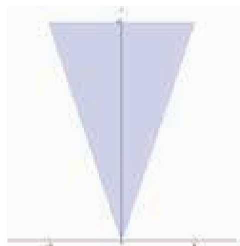
2) Si $y = 0$ la in. 1 queda $\dfrac{x^2}{4} \leq z^2$. Para hacer más simple la interpretación de este corte se considerará en lugar de la desigualdad la igualdad, es decir $\dfrac{x^2}{4} = z^2$, de la cual se deduce que $|y| = 4.\,|z| \;\Rightarrow y = \pm 4.z$. Volviendo a la desigualdad, como los puntos $(0,1)$ y $(0,-1)$ del plano xz la verifican (ya que $0^2 \leq 4{,}1^2$ y $0^2 \leq 4.(-1)^2$), se puede deducir que la región plana que se encuentra en la región W es la de la figura 1.50b.

Figura 1.50: Cortes de W en distintos planos

(a) Corte de la región W en $x = 0$



(b) Corte de la región W $y = 0$



Esto muestra que el crecimiento de los discos es lineal y que la región es un cono doble con eje de simetría $(0,0,z)$. Su gráfico es el de la figura 1.51.

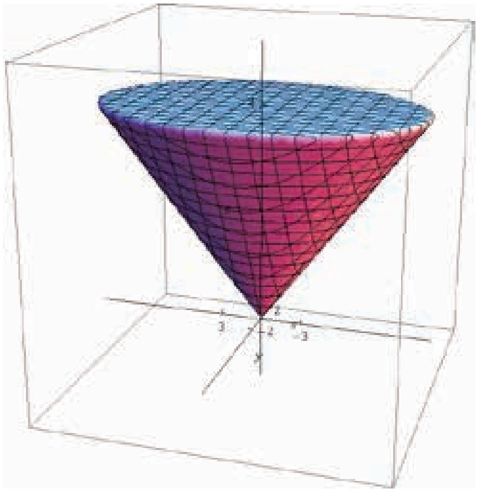
Una descripción analítica de la región en cuestión se puede hacer considerando la sombra de la misma en en plano xy cuando z toma su valor máximo (es la sombra en $z = 0$ de la elipse que se encuentra en el plano $z = 4$): se trata de la elipse $\dfrac{x^2}{8^2} + \dfrac{y^2}{12^2} \leq 1$ de radios $a = 8$ y $b = 12$. Esta sombra se puede describir, según la sección primera como:

$$\begin{cases} -8 \leq x \leq 8 \\ -12.\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{8^2}} \leq y \leq 12.\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{8^2}}. \end{cases}$$

y como z tiene como piso la rama positiva del cono (ya que $z \geq 0$) y como techo el plano $z = 4$, entonces

$$W = \begin{cases} -8 & \leq x \leq 8 \\ -12\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{8^2}} & \leq y \leq 12\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{8^2}} \\ \sqrt{\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}} & \leq z \leq 4. \end{cases}$$

Figura 1.51: Cono $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq z^2, 0 \leq z \leq 4$



Ejercicio 1.2.29. Describir analíticamente a dos cilindros elípticos que tengan sus ejes de simetría paralelos a los ejes x e y, según cada caso. Luego graficarlos.

1.2.5. Paraboloides

El tipo de regiones que estudiaremos en este apartado y en el siguiente será abordado mediante algunos ejemplos concretos, de modo que luego sirva el análisis hecho para trabajar con los casos más generales.

Ejemplo 1.2.30. Considerar la siguiente región:

$$W = \left\{(x, y, y) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z\right\}.$$

Se puede notar que la desigualdad que la define es muy similar al caso de un cono circular, aunque no será, claro, la misma región. Se puede afirmar esto, ya que:

1) Si $z = 0$ se tiene que $x^2 + y^2 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$. Es decir, que a altura 0 se tiene un único punto: $(0, 0, 0)$.

2) Si $z = 1$ se tiene que $x^2 + y^2 \leq 1$. Es decir que a altura 1 se tiene un disco de radio 1 con centro en $(0, 0, 1)$.

3) Si $z = 2$ se tiene que $x^2 + y^2 \leq 2$. Es decir que a altura 2 se tiene un disco de radio $\sqrt{2}$ con centro en $(0, 0, 2)$.

4) Si $z = 4$ se tiene que $x^2 + y^2 \leq 4$. Es decir, que a altura 4 se tiene un disco de radio 2 con centro en $(0, 0, 4)$.

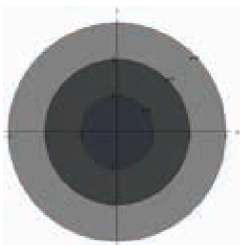
5) Si $z < 0$ se tiene que $x^2 + y^2 \leq z < 0 \Rightarrow x^2 + y^2 < 0$ y esto último es un absurdo, ya que $x^2 + y^2$ es una suma de números reales elevados a una potencia par (por lo tanto, ambos son positivos). Esto sugiere que no hay región por debajo del plano $z = 0$.

6) Si $z = z_0$, $z_0 \geq 0$ se tiene que $x^2 + y^2 \leq z_0$. Es decir que a altura z_0 se tiene un disco de radio $\sqrt{z_0}$ con centro en $(0, 0, z_0)$.

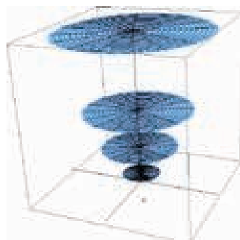
Este primer análisis arroja el hecho de que la región es una unión de discos de radio creciente, pero solo para valores de z mayores o iguales a 0, es decir que la región tiene un eje de simetría: el eje z (ver las figuras 1.52a y 1.52b).

Figura 1.52: Cortes en el plano y en el espacio de $x^2 + y^2 \leq z$

(a) Cortes de la región W de tipo $z = cte$



(b) Cortes de la región W de tipo $z = cte$ vistos en el espacio



Seguidamente se debe observar cómo es el crecimiento de esos discos, para eso se hacen cortes $x = cte, y = cte$:

1) Si $x = 0$ se tiene que $y^2 \leq z$ y esto corresponde a una de las dos regiones en las que divide una parábola al plano yz, en este caso, aquella que se encuentra por arriba de $y^2 = z$.

2) Si $x = 1$ se tiene que $1 + y^2 \leq z$ y esto corresponde a una de las dos regiones en las que divide una parábola al plano, en este caso, aquella que se encuentra por arriba de $1 + y^2 = z$.

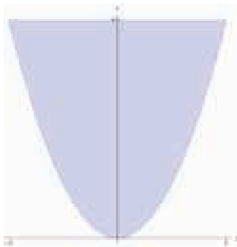
3) Si $y = 0$ se tiene que $x^2 \leq z$ y esto corresponde a una de las dos regiones en las que divide una parábola al plano xz, en este caso, aquella que se encuentra por arriba de $x^2 = z$.

4) Si $y = 1$ se tiene que $1 + x^2 \leq z$ y esto corresponde a una de las dos regiones en las que divide una parábola al plano, en este caso, aquella que se encuentra por arriba de $1 + x^2 = z$.

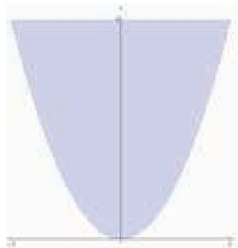
Esto muestra que el crecimiento de los discos es cuadrático, a diferencia del caso del cono, en el que era lineal (ver las figuras 1.53a y 1.53b). De allí que este tipo de regiones se denomina *paraboloide*.

Figura 1.53: Cortes en distintos planos de $x^2 + y^2 \leq z$

(a) Corte de la región W en $x = 0$

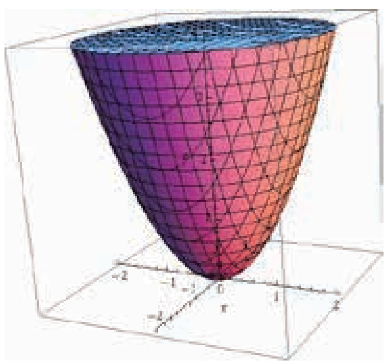


(b) Corte de la región W en $y = 0$



Con todos los datos obtenidos, el gráfico esbozado es el de la figura 1.54. Algo para destacar sobre este ejemplo es que W no era una región acotada, ya que z no estaba acotada superiormente.

Figura 1.54: Paraboloide $x^2 + y^2 \leq z$



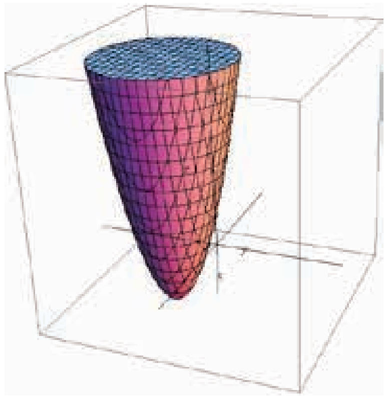
Lo anterior motiva la siguiente definición.

Definición 1.2.31. *Un **paraboloide circular** con eje de simetría paralelo al eje z es una región del espacio definida por*

$$W = \left\{(x, y, y) \in \mathbb{R}^3 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq z - z_0\right\}. \tag{1.2.8}$$

(x_0, y_0, z_0) *se denomina vértice del paraboloide y su eje de simetría es la recta* $\mathbb{L} : X = \lambda.(0, 0, 1) + (x_0, y_0, z_0)$.

Figura 1.55: Paraboloide circular $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq z - z_0$



Ejercicio 1.2.32. Expresar como conjunto paraboloides circulares que tengan su eje de simetría paralelo a los ejes x e y. Para cada caso, decir cuál es el eje de simetría (dar la ecuación de la recta) y esbozar un gráfico aproximado.

Del mismo modo, se pueden definir paraboloides elípticos.

Definición 1.2.33. *Un **paraboloide elíptico** con eje de simetría paralelo al eje z es una región del espacio definida por*

$$W = \left\{(x, y, y) \in \mathbb{R}^3 : \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} \leq z - z_0\right\}. \quad (1.2.9)$$

Lo que se puede ver en estos casos, es que un paraboloide es una región que involucra una desigualdad con dos variables elevadas al cuadrado y una tercera elevada a la 1. A continuación damos algunos ejemplos interesantes.

Ejemplo 1.2.34. La región dada por

$$W = \left\{(x, y, y) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \geq z\right\}$$

es la porción de espacio que queda por "afuera" del paraboloide del primer ejemplo, dado que el punto $(0, 0, 1)$ no verifica la inecuación (ver figura 1.57).

Ejemplo 1.2.35. La región dada por

$$W = \left\{(x, y, y) \in \mathbb{R}^3 : (x - 1)^2 + z^2 \leq y \, , y \leq 4\right\}$$

corresponde a un paraboloide con eje de simetría $(1, y, 4)$, $y \geq 0$, pero acotado (ver figura 1.59).

Figura 1.56: Paraboloide elíptico $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}\leq z-z_0$

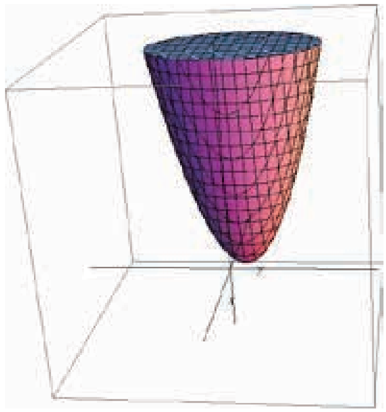
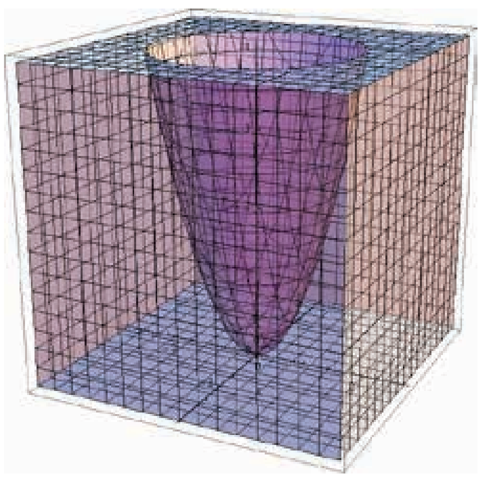


Figura 1.57: Región exterior al paraboloide $x^2+y^2\leq z$



Notemos que la sombra de esta región en el plano xz es la proyección del disco descripto por $(x-1)^2+z^2\leq 4$ que se encuentra en $y=4$. Si además observamos que la variable y se encuentra restringida por las desigualdades $y\leq 4$ y $(x-1)^2+z^2\leq y$ entonces, la región

se describe como

$$W = \begin{cases} -4 & \leq x \leq 4 \\ -\sqrt{4-(x-1)^2} & \leq z \leq \sqrt{4-(x-1)^2} \\ (x-1)^2 + z^2 & \leq y \leq 4. \end{cases}$$

Figura 1.58: Sombra en el plano $y = 0$ del paraboloide $(x-1)^2 + z^2 \leq y\,, y \leq 4$

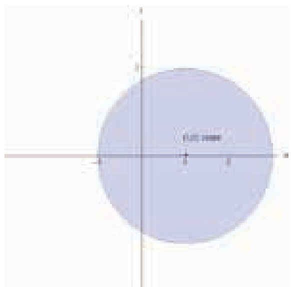
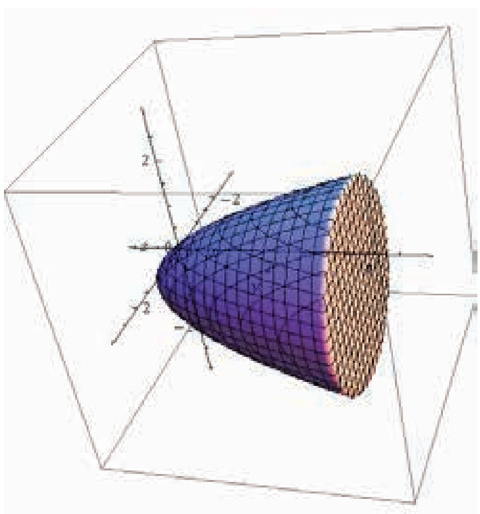


Figura 1.59: Paraboloide $(x-1)^2 + z^2 \leq y\,, y \leq 4$



Ejemplo 1.2.36. La región dada por

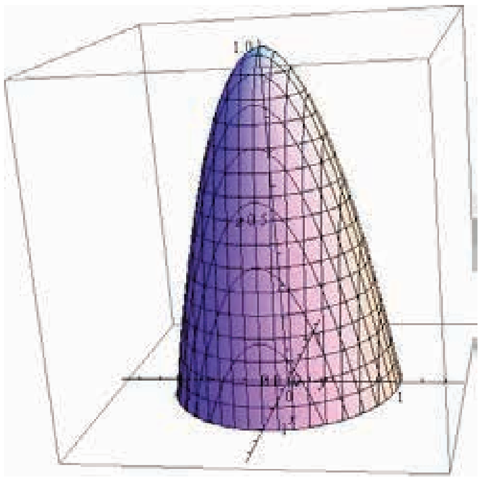
$$W = \{(x, y, y) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 - z\}$$

es un paraboloide pero se puede observar que

$$1 - z \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq z.$$

Esto expresa que su vértice es $(0, 0, 1)$ pero se encuentra invertido, ya que está definido por la condición $z \leq 1$ (ver figura 1.60). En este caso, la sombra en el plano xy corresponde con

Figura 1.60: Paraboloide invertido $x^2 + y^2 \leq 1 - z$



la tapa inferior del paraboloide (en los casos anteriores las sombras eran proyecciones de las secciones más grandes de la región, por decirlo de alguna manera), que es el disco unitario con centro en el origen. Con esto, W queda descripta como

$$W = \begin{cases} -1 & \leq x \leq 1 \\ -\sqrt{1 - x^2} & \leq y \leq \sqrt{1 - x^2} \\ 0 & \leq z \leq 1 - x^2 - y^2, \end{cases}$$

pues $x^2 + y^2 \leq 1 - z \Rightarrow z \leq 1 - x^2 - y^2$ y $1 - x^2 - y^2 \geq 0$, ya que (x, y) se mueve en el disco unitario.

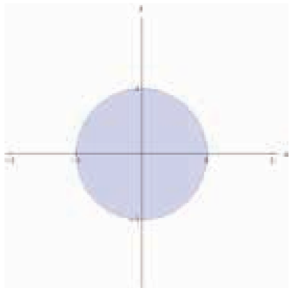
Ejemplo 1.2.37. La región dada por

$$W = \{(x, y, y) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + (y + 2)^2 \leq z\}$$

Es un paraboloide elíptico, ya que la inecuación puede describirse como

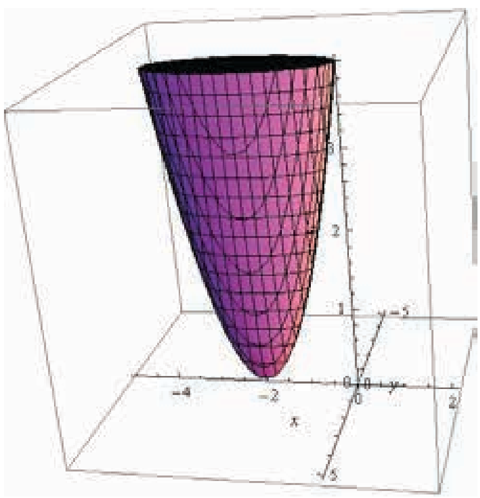
$$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + (y + 2)^2 \leq z.$$

Figura 1.61: Sombra en el plano $z = 0$ del paraboloide invertido $x^2 + y^2 \leq 1 - z$



Su eje de simetría es $(0, -2, z)$, $z \geq 0$ (ver figura 1.62). Queda para el lector comprobar con cortes de tipo $z = cte$, $y = cte$ y $x = cte$ que el gráfico esbozado es el correcto.

Figura 1.62: Paraboloide elíptico $4x^2 + (y+2)^2 \leq z$



1.2.6. Hiperboloides

Siempre el caso de los hiperboloides es el más delicado, dado que no están definidos como en los casos anteriores. Veremos dos casos muy importantes: hiperboloides de una hoja y de dos hojas.

Ejemplo 1.2.38. Esbozar un gráfico de la siguiente región

$$W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\, x^2 + y^2 - z^2 \leq 1\right\}.$$

Para graficar a W será muy útil "cortar" a la región con planos:
En primer lugar, con planos $z = cte$:

1) Si $z = 0$, entonces, la inecuación de W queda $x^2 + y^2 \leq 1$, que representa un disco de radio 1 con centro en $(0,0,0)$.

2) Si $z = 1$, entonces, la misma inecuación queda $x^2 + y^2 \leq 2$, disco de radio $\sqrt{2}$ con centro en $(0,0,1)$.

3) Si $z = z_0$, $z_0 \in \mathbb{R}$, entonces, la misma inecuación queda $x^2 + y^2 \leq 1 + z_0^2$, disco de radio $\sqrt{1+z_0^2}$ (notar que siempre $1 + z^2 > 0\,, \forall z \in \mathbb{R}$) con centro en $(0,0,z_0)$. Esto también sugiere que los discos que aparecen al realizar cortes con ejes horizontales (paralelos al plano xy) tienen siempre radio mayor o igual a 1, siendo únicamente 1 cuando $z = 0$.

En segundo lugar, con planos $x = cte$ e $y = cte$:

1) Si $x = 0$, entonces, la inecuación queda $y^2 - z^2 \leq 1$. Para analizar esto, es mejor trabajar primero en el plano yz: la igualdad $y^2 - z^2 = 1$ representa una hipérbola con asíntotas $z = y$ e $z = -y$ (ver anexo 1), por lo tanto la desigualdad representará o bien a la región comprendida entre las dos ramas, o bien a las dos regiones exteriores. Para ver esto, se toma el punto $(y,z) = (0,0)$ que es un punto que se encuentra en la primera región (entre las dos ramas de la hipérbola) y se ve si verifica la inecuación $y^2 - z^2 \leq 1 \;\Rightarrow\; 0^2 - 0^2 = 0 \leq 1$. Esto expresa que $y^2 - z^2 \leq 1$ es la región comprendida entre las dos ramas.

2) Si $y = 0$, la inecuación queda $x^2 - z^2 \leq 1$. Si se trabaja en el plano yz, la igualdad $x^2 - z^2 = 1$ representa a una hipérbola con asíntotas $z = x$ y $z = -x$. Luego se toma el punto $(y,z) = (0,0)$ que es un punto que se encuentra entre las dos ramas de la hipérbola y se ve si verifica la inecuación $x^2 - z^2 \leq 1 \;\Rightarrow 0^2 - 0^2 = 0 \leq 1$. Esto expresa que $x^2 - z^2 \leq 1$ es la región comprendida entre las dos ramas.

Recapitulando,

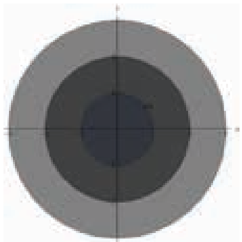
- Con los cortes $z = cte$ se pudo saber que se trata de una unión de discos de radio mayor o igual que 1 y que el disco con el radio menor se haya en el plano $z = 0$. A medida que el módulo de z crece, se tienen discos de radios cada vez mayores (ver figura 1.63a).

- Con los cortes $x = 0$ e $y = 0$ se pudo saber que el crecimiento de esos discos es hiperbólico, considerando la región entre las hipérbolas (ver figuras 1.64a y 1.64b).

Esto remite a la figura 1.65 cuyo gráfico es un hiperboloide con eje de simetría $(0,0,z)$. Para describirlo, podemos suponer que $-1 \leq z \leq 1$, de ese modo queda acotado, puesto que no lo era. Lo mejor que podemos hacer es considerar la sombra de la región en el plano yz

Figura 1.63: Cortes de la región W en el plano y el espacio

(a) Cortes de la región W de tipo $z = cte$



(b) Cortes de la región W de tipo $z = cte$ vistos en el espacio

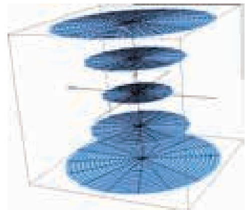
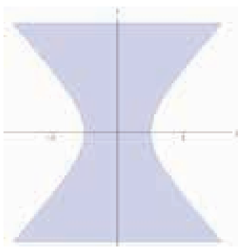
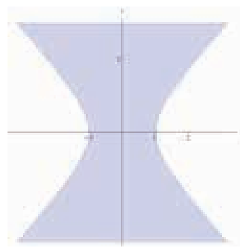


Figura 1.64: Cortes de la región W en distintos planos

(a) Corte de la región W en $x = 0$



(b) Corte de la región W en $y = 0$



($x = 0$), que se ve, de acuerdo con lo que analizamos previamente como la figura 1.64a. Esa sombra tiene una primera descripción: $y^2 - z^2 \leq 1, -1 \leq z \leq 1$. Pero si la escribimos como región elemental del plano (hicimos algo análogo en la primera sección), queda:

$$\begin{cases} -1 & \leq z \leq 1 \\ -\sqrt{1+z^2} & \leq y \leq \sqrt{1+z^2} \\ 0 & \leq z \leq 1 - x^2 - y^2. \end{cases}$$

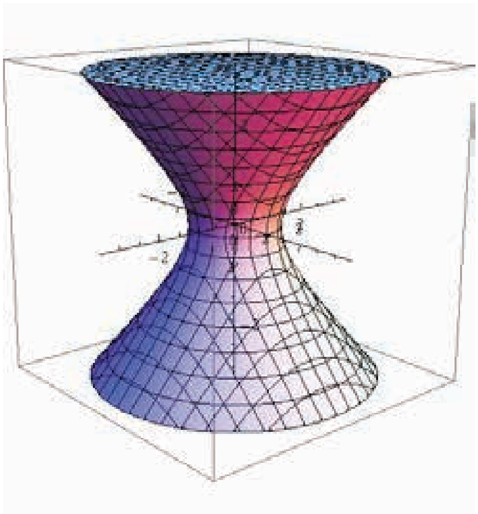
Esto, sumado el hecho de que la variable x cumple

$$x^2 + y^2 - z^2 \leq 1 \Rightarrow x^2 \leq 1 - y^2 + z^2 \Rightarrow -\sqrt{1 - y^2 + z^2} \leq x \leq \sqrt{1 - y^2 + z^2},$$

permite tener otra descripción analítica de la región.

Esta región se denomina *hiperboloide de una hoja* y se caracteriza porque su crecimiento es hiperbólico, pero además porque la región es conexa. Más en general, podemos definirlo de la siguiente manera.

Figura 1.65: Hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 \leq 1$



Definición 1.2.39. *Un **hiperboloide de una hoja** con eje de simetría* $(x_0, y_0, z - z_0)$ *es el siguiente conjunto de puntos del espacio:*

$$W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - (z - z_0)^2 \leq a \,, a \in \mathbb{R}\right\}. \qquad (1.2.10)$$

Ejercicio 1.2.40. Describir analíticamente dos hiperboloides de una hoja: uno con eje de simetría $(x, 0, 0)$ y el otro con eje de simetría $\mathbb{L} : X = \lambda.(0, 1, 0) + (1, 0, 0)$.

A continuación analizaremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2.41. Esbozar un gráfico de la siguiente región

$$W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x^2 - y^2 + z^2 \geq 1\right\}.$$

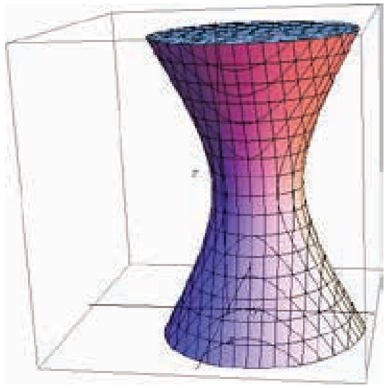
Para graficar W se cortará nuevamente con planos. En primer lugar, con planos $z = cte$:

1) Si $z = 1$, entonces, la inecuación de W queda $-x^2 - y^2 \geq 0$, que representa un único punto $(0, 0, 1)$.

2) Si $z = -1$, entonces, la inecuación de W queda $-x^2 - y^2 \geq 0$, que representa un único punto $(0, 0, -1)$.

3) Si $z = z_0$, la inecuación queda $-x^2 - y^2 \geq 1 - z_0^2 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq -1 + z_0^2$. Esta última inecuación tiene sentido solo si $z_0^2 - 1 > 0$ ya que $x^2 + y^2 \geq 0$, es decir que ocurre si y solo si $z_0 \leq -1$ o $z_0 \geq 1$ (pensando en los ceros de la función cuadrática $f(z) = z^2 - 1$).

Figura 1.66: Hiperboloide de una hoja
$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-(z-z_0)^2 \leq a\,,\, a\in\mathbb{R}$



En segundo lugar, con planos $x = cte$ e $y = cte$:

1) Si $x = 0$, entonces, la inecuación queda $z^2 - y^2 \geq 1$. En el plano yz la igualdad $z^2 - y^2 = 1$ representa una hipérbola con asíntotas $z = y$ e $z = -y$, por lo tanto, la desigualdad representará, o bien a la región comprendida entre las dos ramas o bien a las dos regiones exteriores. Para ver esto, se toma el punto $(y, z) = (0, 0)$ que es un punto que se encuentra en la primera región (entre las dos ramas de la hipérbola) y se ve si verifica la inecuación $z^2 - y^2 \geq 1 \;\Rightarrow\; 0^2 - 0^2 = 0 \underbrace{\geq}_{?} 1$, no la cumple, pues $0 \leq 1$. Esto expresa que $z^2 - y^2 \geq 1$ es la región compuesta de las dos subregiones exteriores. Esto es justamente inverso al caso del hiperboloide de una hoja.

2) Si $y = 0$, entonces, la inecuación queda $z^2 - x^2 \geq 1$. En el plano xz la igualdad $z^2 - x^2 = 1$ representa a una hipérbola con asíntotas $z = x$ e $z = -x$, por lo tanto, la desigualdad representará, o bien a la región comprendida entre las dos ramas, o bien a las dos regiones exteriores. Para ver esto, se toma el punto $(y, z) = (0, 0)$ que es un punto que se encuentra en la primera región (entre las dos ramas de la hipérbola) y se ve si verifica la inecuación $z^2 - x^2 \geq 1 \;\Rightarrow\; 0^2 - 0^2 = 0 \underbrace{\geq}_{?} 1$, no la cumple, pues $0 \leq 1$. Esto expresa que $z^2 - x^2 \geq 1$ es la doble región exterior.

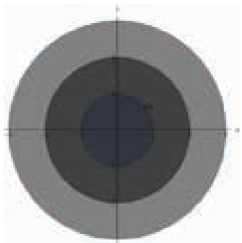
Recapitulando,

- Con los cortes $z = cte$ se pudo saber que se trata de una unión de discos de radio mayor o igual que 0, pero siempre teniendo en cuenta que $|z| \geq 1$. Con ello, los radios crecen conforme crece el valor absoluto de z. No hay región entre $-1 < z < 1$ (ver figuras 1.67a y 1.67b).

- Con los cortes $x = 0$ e $y = 0$ se pudo saber que el crecimiento de esos discos es hiperbólico, considerando la región que no está entre las hipérbolas, es decir, la región partida o disconexa (fer figuras 1.68a y 1.68b).

Figura 1.67: Cortes de la región W en el plano y el espacio

(a) Cortes de la región W de tipo $z = cte$



(b) Cortes de la región W de tipo $z = cte$ vistos en el espacio

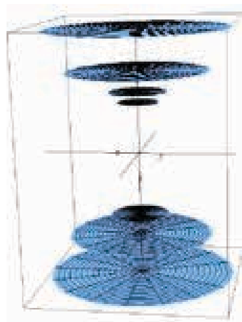
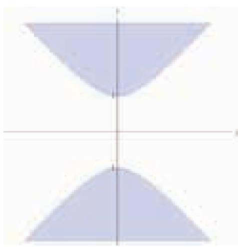
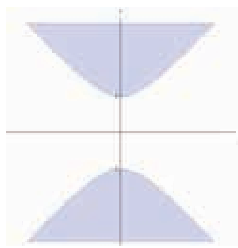


Figura 1.68: Cortes de la región W en distintos planos

(a) Corte de la región W de tipo $x = cte$



(b) Corte de la región W de tipo $y = cte$



Esto remite a la figura 1.69 cuyo gráfico es un hiperboloide con eje de simetría $(0, 0, z)$ pero, a diferencia del caso anterior, su gráfico está desconectado en dos partes.

Definición 1.2.42. *Un **hiperboloide de dos hojas** con eje de simetría $(x_0, y_0, z - z_0)$ es el siguiente conjunto de puntos del espacio:*

$$W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \geq a\,, a > 0\right\}. \quad (1.2.11)$$

Figura 1.69: Hiperboloide $-x^2 - y^2 + z^2 \geq 1$

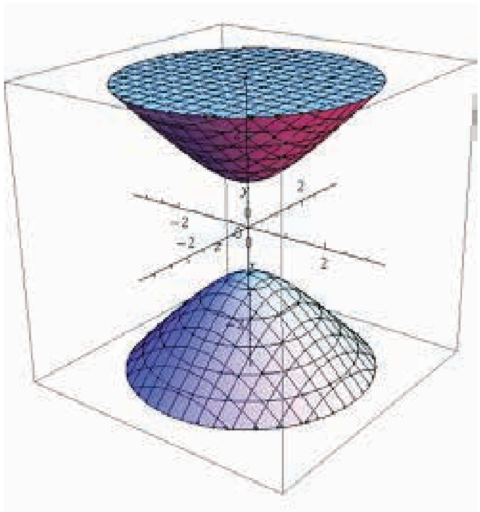
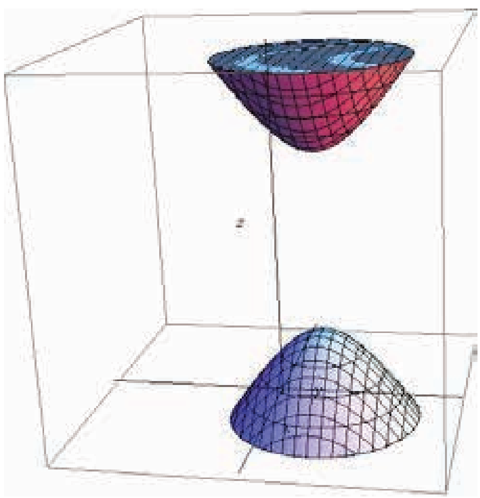


Figura 1.70: Hiperboloide de dos hojas
$-(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \geq a\,, a \in \mathbb{R}_{>0}$



Algo para destacar que será útil en el momento de visualizar una región de estos dos esti-

los es que: si se trata de un hiperboloide de una hoja, precisamente hay una sola variable con signo negativo en la expresión que la define (y esa, precisamente, marca la dirección del eje de simetría), en tanto para el caso del hiperboloide de dos hojas siempre hay dos variables con signo negativo (y la que no lo tiene marca la dirección del eje de simetría). Por ejemplo, en el ejemplo 18 (de una hoja) la variable con el signo negativo era z y su eje de simetría $(0, 0, z)$; en el ejemplo 19 (de dos hojas), en cambio, z era la única variable no negativa, por lo que el eje de simetría era también $(0, 0, z)$.

1.2.7. Bolas

Sea $O = (x_0, y_0, z_0)$ un punto cualquiera de $\mathbb{R}^3$ y sea r un número positivo arbitrario. Se denomina *bola* a todos aquellos puntos del espacio que distan de O igual o menos que r. Como la distancia entre dos puntos del espacio está determinada por la función norma, este tipo de región se puede representar analíticamente de la siguiente manera:

$$W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \|(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)\| \leq r\right\}. \tag{1.2.12}$$

O se denomina *centro de la bola* y r es su *radio*.

Si se recuerda el hecho de que, dado $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, su norma es:

$$\|(a, b, c)\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

entonces,

$$\begin{aligned} \|(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)\| &= \|(x - x_0, y - y_0, z - z_0)\| \\ &= \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la bola W de radio r con centro en (x_0, y_0, z_0) se describe como los puntos del espacio que verifican

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \leq r,$$

y elevando al cuadrado a ambos lados de la inecuación queda

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leq r^2. \tag{1.2.13}$$

Ejemplo 1.2.43. La región de $\mathbb{R}^3$, dada por:

$$W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}$$

es la bola de radio 1 con centro en $(0, 0, 0)$. Es la denominada *bola unitaria* y su gráfico es el del la figura 1.72.

Ejemplo 1.2.44. La región de $\mathbb{R}^3$, dada por:

$$W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \geq 1\right\}$$

es el exterior de la bola unitaria, ya que esta inecuación no es verificada para ningún punto del interior de ella (por ejemplo, notemos que si se considera el origen, $0^2 + 0^2 + 0^2 = 0 \leq 1$. Ver la figura 1.73.

Figura 1.71: Bola $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 \leq r^2$

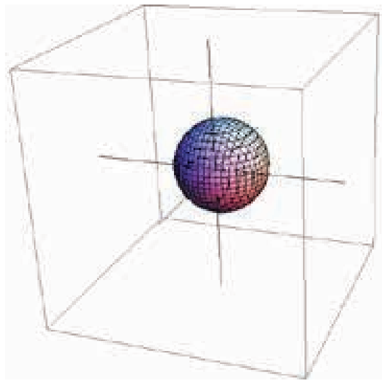
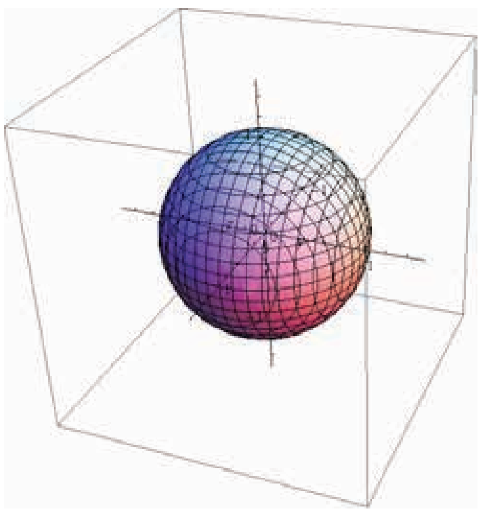


Figura 1.72: Bola unitaria $x^2+y^2+z^2 \leq 1$



Ejemplo 1.2.45. La región de $\mathbb{R}^3$, dada por:

$$W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \, x^2+(y+1)^2+(z-2)^2 \leq 4\right\}$$

es la bola de radio 2 con centro en $(0,-1,2)$ (ver figura 1.74).

Hay otra manera de deducir el gráfico de una bola y entenderlo si trabajamos con la inecuación que la describe. En efecto, si cortamos la región con cualquier plano que pase por el cen-

Figura 1.73: Exterior de la bola unitaria $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$

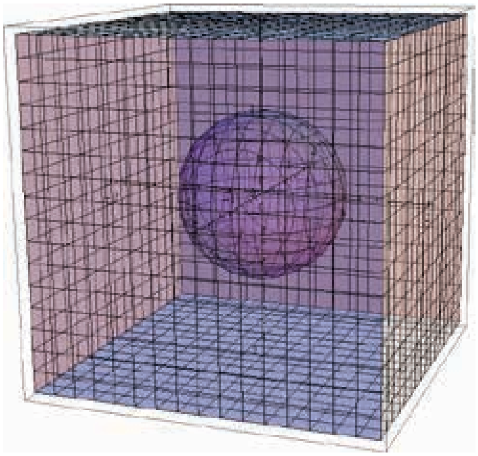
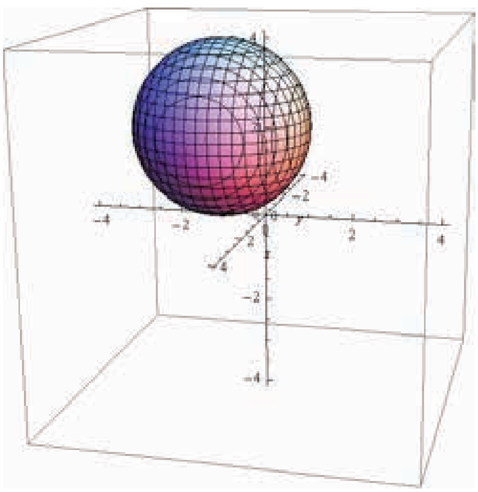


Figura 1.74: Bola $x^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 \leq 4$

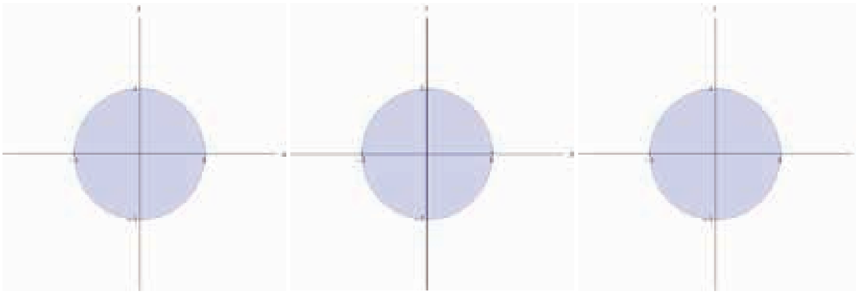


tro de la bola, (x_0, y_0, z_0) se obtienen discos. Por ejemplo, si se considera la región dada por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ y se corta con los tres planos $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$ se tiene, en cada caso:

1) $x = 0 \Rightarrow 0^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \Rightarrow y^2 + z^2 \leq 1$, disco en el plano yz de radio 1 y centro $(0, 0)$.

Figura 1.75: Cortes de la bola W en distintos planos

(a) Corte de la bola W en $z = 0$ **(b) Corte de la bola W en $x = 0$** **(c) Corte de la bola W en $y = 0$**

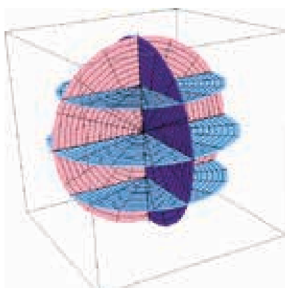


2) $y = 0 \Rightarrow x^2 + 0^2 + z^2 \leq 1 \Rightarrow x^2 + z^2 \leq 1$, disco en el plano xz de radio 1 y centro $(0, 0)$.

3) $z = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 0^2 \leq 1 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 1$, disco en el plano xy de radio 1 y centro $(0, 0)$.

Pero si cortamos con otros planos del tipo $z = cte$, $x = cte$ o $y = cte$ con $cte \in (-1, 1)$ obtenemos discos pero de radio menor a 1. En la figura 1.76 podemos observar algunos cortes en un mismo gráfico, que nos permiten reconstruir la forma de la bola.

Figura 1.76: Diversos cortes de la bola W en el espacio



Observación 1.2.46. La bola de centro (x_0, y_0, z_0) y de radio a es una región elemental del espacio y se describe como región de tipo I como:

$$\begin{cases} -a \leq x \leq a \\ -\sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2} \\ -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \end{cases} \tag{1.2.14}$$

para todo $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ y $a > 0$.

Esto sale del hecho de que la sombra de una bola de radio a es un disco del mismo radio en cualquiera de los planos que pasan por el centro de la bola misma. Además, esto hace que las bolas se puedan describir como regiones de tipo II o III de forma muy similar a la que presentamos en la ecuación 1.2.14.

Por ejemplo, la descripción como región de tipo I para la bola unitaria de centro en el origen es

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \\ -\sqrt{1-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}. \end{cases}$$

En tanto que su descripción como región de tipo II es

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -\sqrt{1-x^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2} \\ -\sqrt{1-x^2-z^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2-z^2}. \end{cases}$$

Se puede conseguir de manera análoga su descripción como región de tipo III, de modo tal que las bolas son regiones de tipo IV.

1.2.8. Elipsoides macizos

En analogía de lo que hemos desarrollado para bolas, pretendemos generalizar a regiones denominadas elipsoides macizos.

Definición 1.2.47. *Un **elipsoide macizo** es una región del espacio definida por el siguiente conjunto*

$$W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} \leq 1\right\}, \qquad (1.2.15)$$

con $a, b, c > 0$.

(x_0, y_0, z_0) es el centro del elipsoide macizo y además,

1) a es el radio máximo en la dirección de x,

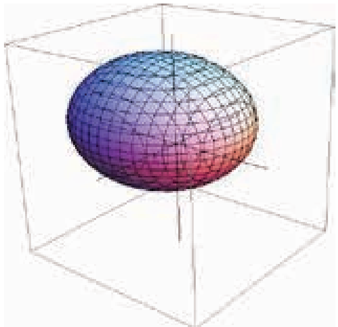
2) b es el radio máximo en la dirección de y,

3) c es el radio máximo en la dirección de z.

Para interpretar el gráfico del elipsoide macizo y, con ello, su relación con la bola, se puede cortar a la región por cualquier plano que pase por (x_0, y_0, z_0):

1) Si se considera el plano $x = x_0$ se tiene que $\frac{\overbrace{(x_0-x_0)^2}^{=0}}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} \leq 1$ y esta expresión corresponde a una elipse en el plano considerado de centro (y_0, z_0).

Figura 1.77: Elipsoide macizo



2) Si se considera el plano $y = y_0$ se tiene que $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{\overbrace{(y_0-y_0)^2}^{=0}}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} \leq 1$ y esta expresión corresponde a una elipse en el plano considerado de centro (x_0, z_0).

3) Si se considera el plano $z = z_0$ se tiene que $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{\overbrace{(z_0-z_0)^2}^{=0}}{c^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} \leq 1$ y esta expresión corresponde a una elipse en el plano considerado de centro (y_0, z_0).

Considerando el caso más sencillo $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$, los cortes con planos $x, y, z = cte$ son los correspondientes a las figuras 1.78a, 1.78b, 1.78c y 1.79.

Con todo lo anterior, un gráfico aproximado del elipsoide macizo con centro en $(0, 0, 0)$ y $a < b < c$ es el de la figura 1.80. Más en general, un elipsoide macizo con centro en cualquier (x_0, y_0, z_0) sería similar al de la figura 1.81. La intersección del mismo con cualquier plano que pase por el centro del elipsoide macizo será una región plana elíptica. Para mayor comodidad, en muchos casos y de modo indistinto, denominaremos elipses tanto a los discos elípticos como a las curvas homónimas (ver figuras 1.78b y 1.78c).

Ejemplo 1.2.48. La región definida por

$$W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{(x-1)^2}{4} + y^2 + \frac{(z+1)^2}{16} \leq 1\right\}$$

es un elipsoide macizo con centro en $(1, 0, -1)$ y radios $a = 2, b = 1, c = 4$. Su gráfico es el de la figura 1.82.

Figura 1.78: Cortes del elipsoide W en distintos planos

(a) Corte del elipsoide macizo W de tipo $z = cte$ (b) Corte del elipsoide macizo W de tipo $x = cte$ (c) Corte del elipsoide macizo W de tipo $y = cte$

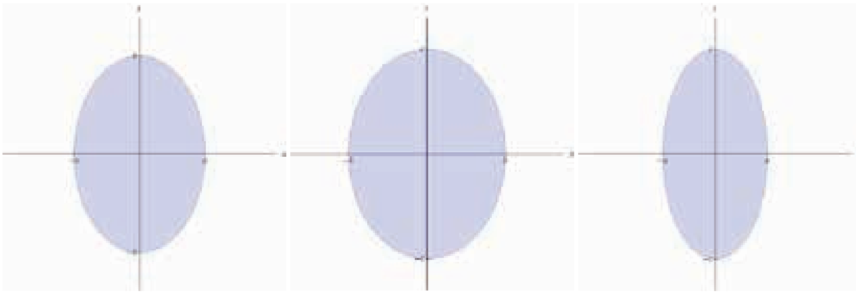
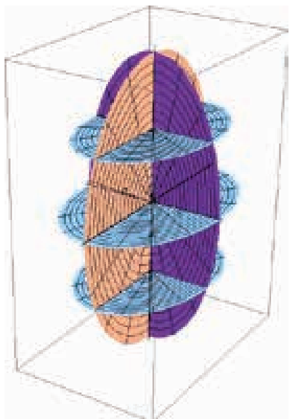


Figura 1.79: Diversos cortes del elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leq 1$ en el espacio



Observación 1.2.49. La bola es un caso particular de un elipsoide macizo, con $a = b = c = r^2$.

Ejemplo 1.2.50. Mostrar que la región definida por

$$W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + y^2 + \frac{(z-3)^2}{2} \leq 8\right\}$$

es un elipsoide macizo.
En efecto, si dividimos a ambos lados de la desigualdad por 8,

$$\frac{4.x^2 + y^2 + \dfrac{(z-3)^2}{2}}{8} \leq \frac{8}{8} \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} + \frac{(z-3)^2}{16} \leq 1$$

Figura 1.80: Elipsoide macizo $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1$

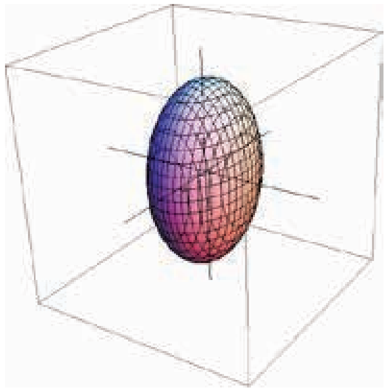
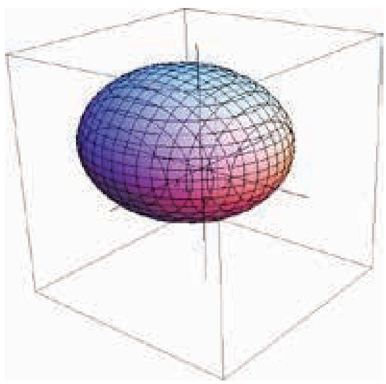


Figura 1.81: Elipsoide macizo $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}\leq 1$



$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{\sqrt{2}^2}+\frac{y^2}{\sqrt{8}^2}+\frac{(z-3)^2}{4^2}\leq 1$$

Este último paso permite ver claramente que se trata de un elipsoide macizo con centro en $(0,0,3)$ y radios $a=\sqrt{2}$, $b=\sqrt{8}$, $c=4$. Si no se realiza este último paso algebraico se puede incurrir en errores con mucha facilidad.

Su gráfico es es el correspondiente a la figura 1.83.

Cuando miramos los cortes $x=x_0$, $y=y_0$ y $z=z_0$ de algún elipsoide macizo (supongamos con centro en el origen de coordenadas) tenemos siempre regiones planas elípticas, aun-

Figura 1.82: Elipsoide macizo $\dfrac{(x-1)^2}{4}+y^2+\dfrac{(z+1)^2}{16}\leq 1$

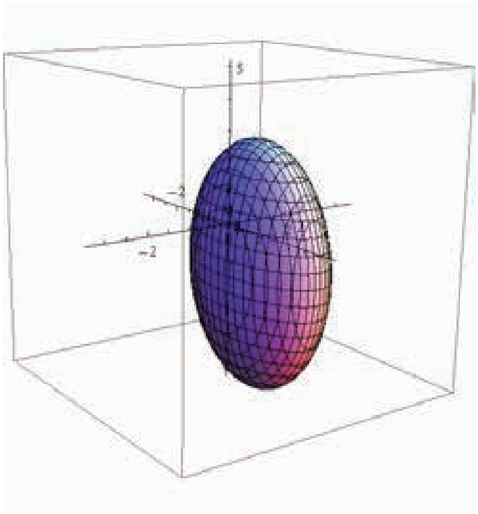
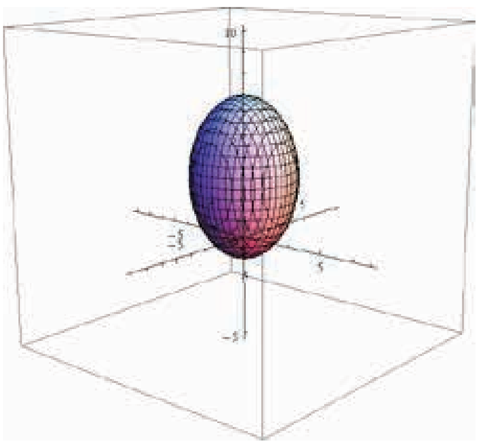


Figura 1.83: Elipsoide macizo $\dfrac{x^2}{\sqrt{2}^2}+\dfrac{y^2}{\sqrt{8}^2}+\dfrac{(z-3)^2}{4^2}\leq 1$



que no suelen ser iguales entre sí. Esto motiva a una observación acerca de cómo se describen estas regiones del espacio.

Observación 1.2.51. Un elipsoide macizo de centro $(0,0,0)$ y de radios $a,b,c>0$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^2}{a^2}\leq 1$$

es una región elemental del espacio y se describe como región de tipo I como:

$$\begin{cases} -a\leq x\leq a \\ -\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\leq y\leq \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \\ -\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}}\leq z\leq \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}}. \end{cases} \tag{1.2.16}$$

El caso más general, aquel en el que el centro sea un (x_0,y_0,z_0) cualquiera del espacio no lo enunciamos porque consideramos que puede complicar la idea (y no es nuestra intención que esto suceda). Pero lo dejamos como ejercicio para que el lector se divierta.

Ejercicio 1.2.52. Describir todos los elipsoides macizos de los ejemplos como regiones elementales.

1.2.9. Regiones mixtas o más generales

En esta sección veremos algunos ejemplos de regiones que involucran a las trabajadas hasta el momento. También veremos cómo hallar y describir intersecciones de regiones.

Ejemplo 1.2.53. Graficar las siguiente región de $\mathbb{R}^3$:

$$W=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 1\leq x^2+y^2+z^2\leq 4\right\}$$

Aquí hay una doble inecuación, por lo que resultaría conveniente separarla y analizar cada parte. Si se considera la inecuación $x^2+y^2+z^2\leq 4$, se puede afirmar que esta corresponde al interior de una bola maciza con centro en $(0,0,0)$ y radio igual a 2 (ver figura 1.84). Por otra parte, si se toma $1\leq x^2+y^2+z^2$ se tiene la porción exterior de la bola unitaria centrada en el origen (ver figura 1.73). Por lo tanto, las dos inecuaciones corresponden a secciones de bolas concéntricas (que tienen el mismo centro). La región W será entonces la región intersección entre las dos condiciones, es decir, será el anillo macizo de centro $(0,0,0)$ y comprendido entre los radios 1 y 2. Su gráfico es el de la figura 1.85.

Ejemplo 1.2.54. Graficar el sólido que verifica las siguientes condiciones:

1) $x^2+y^2+z^2\leq 1$,

2) $x^2+y^2+z^2\leq 2y$.

La condición 1 claramente describe la bola unitaria con centro en el origen. Pero la condición 2 es más difícil de visualizar, dado que del lado derecho de la desigualdad hay un término lineal que depende de y, además de la presencia de las tres variables elevadas al cuadrado, por lo que se descarta que sea un paraboloide. Debemos trabajar esa expresión:

$$x^2+y^2+z^2\leq 2y\ \Rightarrow x^2+y^2-2y+z^2\leq 0.$$

Figura 1.84: Región correspondiente a $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$

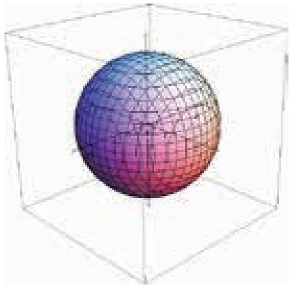
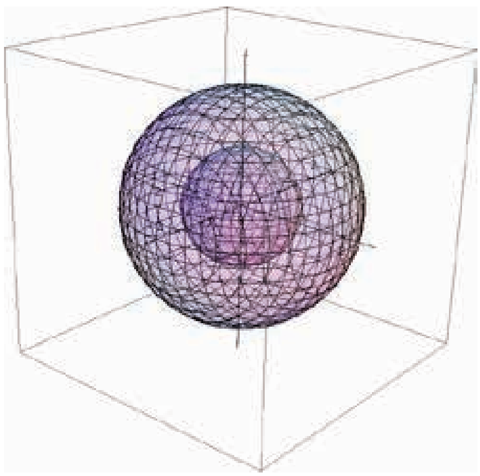


Figura 1.85: Región dada por $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$



Ahora podemos pensar lo siguiente: la expresión $y^2 - 2y$ es casi la expresión del cuadrado de un binomio desarrollado, específicamente del trinomio cuadrado perfecto $y^2 - 2y + 1 = (y-1)^2$. Lo único que falta es el $+1$, por lo que para obtenerlo lo sumamos y restamos en la expresión de la izquierda de la desigualdad (o lo sumamos a ambos lados, lo importante es que la desigualdad no sea afectada por esto). Queda entonces:

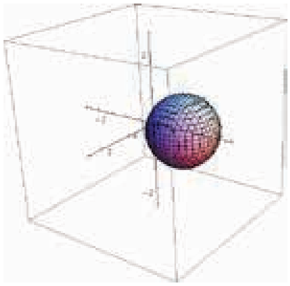
$$x^2 + \underbrace{y^2 - 2y + 1}_{=(y-1)^2} - 1 + z^2 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + (y-1)^2 - 1 + z^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + (y-1)^2 + z^2 \leq 1. \qquad (1.2.17)$$

Pasando el -1 sumando a la derecha de la inecuación hace que esta defina el interior de una

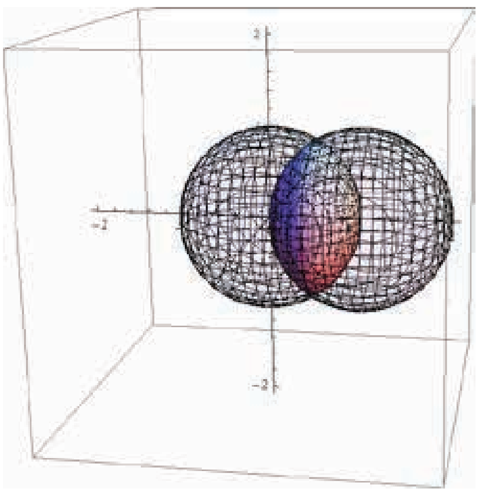
bola unitaria de centro $(0,1,0)$ (ver figura 1.86).

Figura 1.86: Región correspondiente a $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2y$



La región W es, entonces, la región determinada entre dos bolas unitarias no concéntricas, aunque sus centros se hallan ambos sobre el eje y, lo cual podemos interprertalo como que una es la otra desplazada en 1 hacia el lado de las $y > 0$ (ver figura 1.87).

Figura 1.87: Región dada por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ **y** $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2y$



Lo que hicimos en este ejemplo sobre la segunda desigualdad fue lo que comúnmente se denomina "completar cuadrados". Esta es una técnica muy utilizada en este tipo de problemas, en particular cuando se trabaja con polinomios de varias variables (tener en cuenta que $x^2 + y^2 - 2y + z^2$ es un polinomio de grado dos en tres variables, x, y, z. Pensar lo mismo para las expresiones que describen todas la otras regiones).

Algo importante en el momento de visualizar la región es describir analíticamente la intersección de las dos condiciones. En el gráfico se ve que la intersección es un disco con centro en el eje y, pero se puede obtener precisamente su descripción.

La región es la encerrada entre las dos bolas no concéntricas de radio 1, las cuales, si bien están descriptas por desigualdades, las igualdades $x^2+y^2+z^2=1$ y $x^2+(y-1)^2+z^2=1$ representan los bordes de cada una de las bolas, respectivamente (la "cáscara", por así decirlo; pensar en la definición de bola como distancia al centro O). Entonces, el borde del disco de intersección, que es una circunferencia, se encuentra en la intersección de las dos cáscaras. Más precisamente:

$$\left.\begin{array}{c} x^2+y^2+z^2=1 \\ x^2+(y-1)^2+z^2=1 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2+y^2+z^2=x^2+(y-1)^2+z^2$$

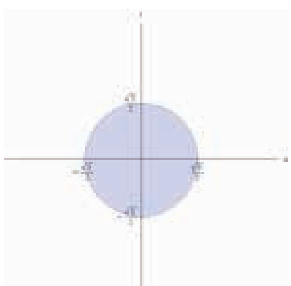
$$\Rightarrow y^2-(y-1)^2=0 \Rightarrow y^2-(y^2-2y+1)=0 \Rightarrow 2y-1=0 \Rightarrow y=\frac{1}{2}.$$

Esto expresa que la intersección ocurre en el plano $y=\frac{1}{2}$, pero no indica cómo es esa intersección. Para ver ello hay que tomar el valor de y obtenido y reemplazarlo en cualquiera de las dos ecuaciones, ya que la intersección está en las dos. Si se reemplaza en $x^2+y^2+z^2=1$:

$$x^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+z^2=1 \Rightarrow x^2+\frac{1}{4}+z^2=1 \Rightarrow x^2+z^2=\frac{3}{4}.$$

La última igualdad corresponde a una circunferencia de radio $\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, con centro en $(0,0)$ en el plano xz. Por lo tanto, la intersección será el disco $x^2+z^2\leq\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$, del mismo radio y centro en $(0,\frac{1}{2},0)$ (ver figura 1.88).

Figura 1.88: Intersección de $x^2+y^2+z^2=1$ y $x^2+(y-1)^2+z^2=1$



En cuanto a la descripción de la región, en este caso podemos hacerla porque se trata de una región elemental. Pero para ello debemos mirar su sombra en el plano xz ($y=0$), que es el disco $x^2+z^2\leq\frac{3}{4}$. Luego debemos tener en cuenta lo siguiente:

- La variable y, vista como dependiente de las otras dos se encuentra acotada debajo por la cáscara de la bola de centro $(0,1,0)$, mientras que por arriba es acotada por la que tiene centro en el origen.
- Esta región cumple siempre que $y \leq 1$.
- $x^2 + (y-1)^2 + z^2 \leq 1 \Rightarrow |y-1| \leq \sqrt{1-x^2-z^2}$
  $\Rightarrow 1 - \sqrt{1-x^2-z^2} \leq y \leq 1 + \sqrt{1-x^2-z^2}$, pero $1 \leq 1 + \sqrt{1-x^2-z^2}$ siempre, entonces solo tomo la primera desigualdad como límite inferior de y para la región.
- $x^2+y^2+z^2 \leq 1 \Rightarrow |y| \leq \sqrt{1-x^2-z^2} \Rightarrow -\sqrt{1-x^2-z^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2-z^2}$, pero la región cumple siempre que $y \geq 0$, entonces solo tomo la segunda desigualdad como límite superior de y para la región.

Con esto, la región W queda descripta como:

$$W = \begin{cases} -\sqrt{\dfrac{3}{4}} & \leq x \leq \sqrt{\dfrac{3}{4}} \\ -\sqrt{\dfrac{3}{4} - x^2} & \leq z \leq \sqrt{\dfrac{3}{4} - x^2} \\ 1 - \sqrt{1-x^2-z^2} & \leq y \leq \sqrt{1-x^2-z^2}. \end{cases}$$

Ejemplo 1.2.55. Graficar las siguiente región de $\mathbb{R}^3$:

$$W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq z^2 \leq 4 - x^2 - y^2, z \geq 0\right\}.$$

Nuevamente, podemos separar las dos desigualdades:

1) $x^2 + y^2 \leq z^2$

2) $z^2 \leq 4 - x^2 - y^2$

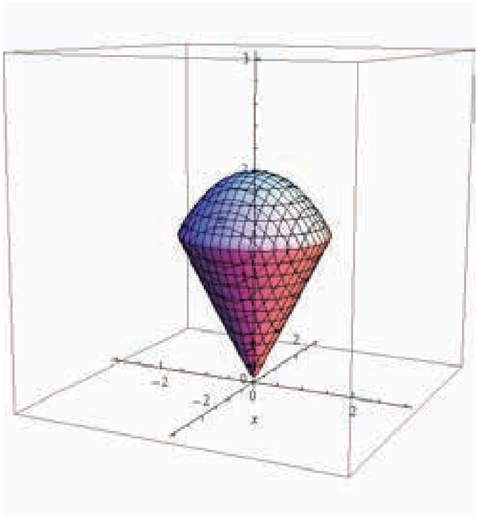
La primera desigualdad corresponde a un doble cono circular con eje de simetría $(0,0,z)$, en tanto la segunda desigualdad, si se pasan todas la variables hacia el miembro de la izquierda, es una bola de radio 2 y centro $(0,0,0)$. Si se tiene en cuenta la condición $z \geq 0$, se debe considerar solo el cono simple "positivo". Por lo tanto, la región W es aquella que se encuentra entre el cono positivo y la bola: es una región cuyo límite inferior o "piso" es $x^2+y^2 = z^2$, $z \geq 0$ (cáscara del cono), mientras que su límite superior o "techo" es $x^2+y^2+z^2 = 4$ (cáscara de la bola). Su gráfico queda entonces como el de la figura 1.89.

En este caso también se puede hallar la intersección de los bordes de estas cáscaras que limitan a W:

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2 = z^2 \\ x^2+y^2+z^2 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{x^2+y^2}_{=z^2} + z^2 = 4 \Rightarrow z^2 + z^2 = 4.$$

$$\Rightarrow 2z^2 = 4 \Rightarrow z^2 = 2 \Rightarrow z = \pm\sqrt{2}.$$

Figura 1.89: Región dada por $x^2 + y^2 \leq z^2$ y $z^2 \leq 4 - x^2 - y^2$



Esto nos dice que las intersecciones ocurrirían en los planos $z = \sqrt{2}$ y $z = -\sqrt{2}$, pero si tenemos en cuenta el hecho de que $z \geq 0$, entonces consideraremos solo la intersección en el plano $z = \sqrt{2}$ (la otra corresponde a la intersección de la bola con el cono inferior o negativo, aquel tal que $z \leq 0$). Con esto, reemplazamos en la igualdad $x^2 + y^2 = z^2$ y queda:

$$x^2 + y^2 = (\sqrt{2})^2.$$

Por lo tanto, la intersección entre los bordes es una circunferencia de radio $\sqrt{2}$ y centro $(0, 0, \sqrt{2})$ (ver figura 1.90). Para describirla, podemos hacer en analogía con el ejemplo anterior lo siguiente. Teniendo en cuenta que

- La sombra de W en el plano $z = 0$ corresponde al disco de radio $\sqrt{2}$ y centro en el origen.

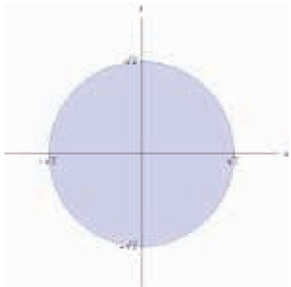
- La variable z se puede ver como que está acotada inferiormente por el cono y superiormente por el paraboloide invertido, de hecho, de la descripción inicial de W y que $z \geq 0$ sale que:

$$x^2 + y^2 \leq z^2 \leq 4 - x^2 - y^2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}.$$

Entonces

$$W = \begin{cases} -\sqrt{2} & \leq x \leq \sqrt{2} \\ -\sqrt{2 - x^2} & \leq y \leq \sqrt{2 - x^2} \\ \sqrt{x^2 + y^2} & \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}. \end{cases}$$

Figura 1.90: Intersección de $x^2 + y^2 = z^2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 4$



Ejemplo 1.2.56. Graficar la siguiente región de $\mathbb{R}^3$:

$$W = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \, x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \, , \, 0 \leq z \leq 1 \right\}.$$

Nuevamente, podemos separar las dos inecuaciones:

1) $\sqrt{x^2 + y^2} \geq z$. Es la parte exterior (pues $(0, 0, 1)$ verifica la desigualdad) del mismo cono que en el ejemplo anterior, pues $(0, 0, 1)$ no verifica la desigualdad y además porque z debe ser positivo.

2) $z \geq x^2 + y^2$. Es la parte interior de un paraboloide con eje de simetría $(0, 0, z)$, $z \geq 0$.

De lo anterior, se desprende como conclusión que W es la región encerrada entre el paraboloide y el cono que tienen eje de simetría $(0, 0, z)$, $z \geq 0$. W tiene como límite inferior a $\sqrt{x^2 + y^2} = z$ y como límite superior a $x^2 + y^2 = z$. Pero esto sucede porque la intersección entre $\sqrt{x^2 + y^2} = z$ y $x^2 + y^2 = z$ es una circunferencia:

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{x^2 + y^2} = z \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{elevando al cuadrado}} \quad \sqrt{x^2 + y^2} = z^2 \\ x^2 + y^2 = z \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{x^2 + y^2}_{=z^2} = z \Rightarrow z^2 = z$$

$$\Rightarrow z^2 - z = 0 \Rightarrow z.(z - 1) = 0 \Rightarrow z = 0, z = 1.$$

Queda claro que si $z = 0$, entonces, $x = y = 0$, por lo que se intersecan en el origen (esto ya era evidente porque tanto el cono como el paraboloide de este ejemplo tienen sus vértices allí). Si $z = 1$, entonces

$$x^2 + y^2 = 1^2 = 1.$$

La intersección de las cáscaras es una circunferencia unitaria con centro $(0, 0, 1)$.

Queda para el lector describir la región como elemental, pero, siguiendo lo que hicimos en el ejemplo pasado se hace con poca dificultad.

Figura 1.91: Región dada por $\sqrt{x^2+y^2} \geq z$**,** $0 \leq z \leq 1$ **y** $z \geq x^2+y^2$

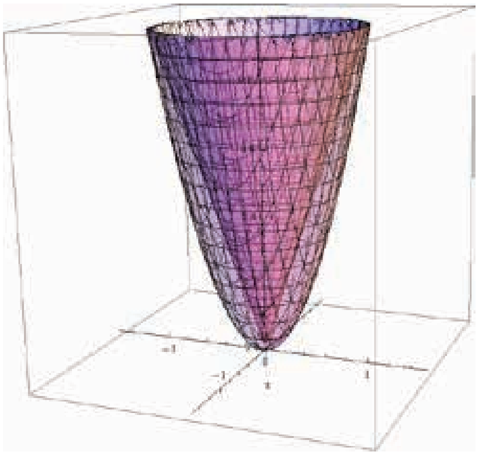
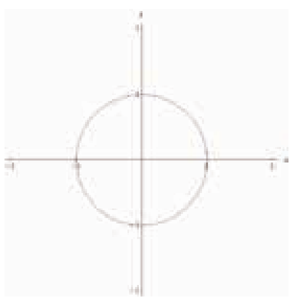


Figura 1.92: Intersección de $\sqrt{x^2+y^2} = z$ **y** $x^2+y^2 = z$



Capítulo 2

Integrales dobles y triples

2.1. Integrales dobles

Definición 2.1.1. *Una función $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se dice que es* ***integrable*** *si es continua en todo A, salvo quizás, en una región de área nula de su dominio.*

Definición 2.1.2. *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función integrable y sea R, un rectángulo. Se define la* ***integral doble de f sobre*** *R como*

$$\iint_R f\,dA = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_j)\Delta x_i \Delta y_j, \tag{2.1.1}$$

con $\Delta x_i = |x_{i+1} - x_i|$ y $\Delta y_j = |y_{j+1} - x_j|$, que son los tamaños de los lados correspodientes al rectángulo $R_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$, para cada i, j.

El límite que aparece en la ecuación 2.1.1 es el correspondiente al de las *sumas de Riemann* y podría no existir o ser infinito. Si la función es integrable (ver definición 2.1.1), entonces, siempre será finito dicho límite.

La forma de operar con la integral doble definida en la ecuación (2.1.1) es a partir de la noción de integrales en una sola variable iteradas.

Definición 2.1.3. *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función integrable y sea $R = [a, b] \times [c, d]$, un rectángulo. Se define la* ***integral iterada de f sobre*** *R como*

$$\iint_R f\,dA = \iint_R f\,dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\,dydx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\,dy\right] dx \tag{2.1.2}$$

La idea es tomar a la variable x como una constante e integrar en primera instancia con respecto a y, que es hacer una integral unidimensional. Al evaluar quedará una segunda integral para calcular, pero la variable y habrá desaparecido, restando integrar respecto de x.

Ejemplo 2.1.4. Calcular $\iint_R 1\,dxdy$, siendo $R = [1,3] \times [-1,1]$.
Por el teorema anterior, se puede calcular esta integral doble por el método iterativo, ya que la función $f(x,y) = 1$ es integrable y continua (de hecho, es una función del tipo escalonada con un solo escalón, ya que es constante). Entonces

$$\iint_R 1\,dxdy = \int_{-1}^{1}\left[\int_{1}^{3} 1\,dx\right]dy = \int_{-1}^{1}[x]_{x=1}^{x=3}\,dy$$

$$\int_{-1}^{1}[3-1]\,dy = \int_{-1}^{1} 2\,dy = 2y|_{-1}^{1} = 2.(1-(-1)) = 4$$

A continuación se enumeran algunas propiedades de las integrales dobles sobre regiones rectangulares.

Teorema 2.1.5. *Sean f y g, campos escalares definidos sobre un rectángulo R del plano real. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

1) *Linealidad:*

$$\iint_D a.f + b.g\,dxdy = a\iint_D f\,dxdy + b\iint_D g\,dxdy,$$
$$\forall\, a,b \in \mathbb{R}.$$

2) *Aditividad: si $D = D_1 \cup D_2$ con D_1 y D_2 no solapadas, es decir que a lo sumo tienen como intersección una curva,*

$$\iint_D f\,dxdy = \iint_{D_1} f\,dxdy + \iint_{D_2} f\,dxdy.$$

3) *Comparación: si $f(x,y) \leq g(x,y), \forall\,(x,y) \in D$*

$$\iint_D f\,dxdy \leq \iint_D g\,dxdy.$$

De esta última propiedad de comparación se desprende que si $f \geq 0$ entonces $\iint_D f \geq 0$. Lo que no vale es la recíproca (probarlo).

Si se considera una región D acotada, y se tiene una $f : D \to \mathbb{R}^3$, se puede extender la definición de integral doble a regiones más generales. Si D es región de tipo III, se puede hallar siempre un rectángulo R tal que D esté completamente contenido en R. De este modo, se puede definir una nueva función $F : R \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si} \quad (x,y) \in D \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) \in R - D \end{cases}$$

Como F resulta integrable en R, por aditividad queda

$$\iint_D f\,dA + \iint_{R-D} 0\,dA = \iint_R F\,dA.$$

Si D es región de tipo I, es decir, $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ g(x) \leq y \leq h(x)\right\}$, entonces, se tiene que

$$\int_c^d F(x, y)\, dydx = \int_{g(h)}^{h(x)} F(x, y)\, dydx = \int_{g(h)}^{h(x)} f(x, y)\, dydx$$

y entonces se tiene que

$$\iint_D f\, dxdy = \int_a^b \left[\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)\, dx \right] dy \tag{2.1.3}$$

Análogamente se pueden definir iterativamente integrales dobles sobre regiones S de tipo II:

$$\iint_S f\, dxdy = \int_c^d \left[\int_{r(x)}^{t(x)} f(x, y)\, dx \right] dy \tag{2.1.4}$$

La operatoria en este caso es análoga a la de la definición para regiones rectangulares, teniendo en cuenta que primero se integrará respecto de x, considerando a y como constante.

Combinando las definiciones anteriores se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 2.1.6. *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función integrable y sea D, una región elemental de tipo III. La integral doble de f sobre D es*

$$\iint_D f\, dxdy = \int_a^b \left[\int_{h(x)}^{g(x)} f(x, y)\, dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_{r(x)}^{t(x)} f(x, y)\, dx \right] dy. \tag{2.1.5}$$

De modo que si se tiene una región de tipo III, se puede integrar en el orden que se quiera, pero para eso se tendrá que describir a la región como de tipo I o de tipo II, según convenga. Este teorema se conoce “Teorema de Fubini”. Con esto se puede empezar a calcular integrales dobles, como se hará en los ejemplos siguientes. Pero antes de ello, enunciamos propiedades importantes de las integrales dobles.

Las propiedades de linealidad, aditividad y comparación mencionadas para integrales sobre rectángulos se extienden a estas integrales definidas sobre regiones de tipo III.

Se puede observar que en el ejemplo 2.1.4, la integral sobre el rectángulo $[1, 3] \times [-1, 1]$ dio $4 = (3 - 1).(1 - (-1))$ que es exactamente el producto de la longitud de su base y su altura. De modo que esa integral dio el valor del área del rectángulo. Esto se puede generalizar a cualquier región de tipo III del plano y motiva la definición 2.1.7.

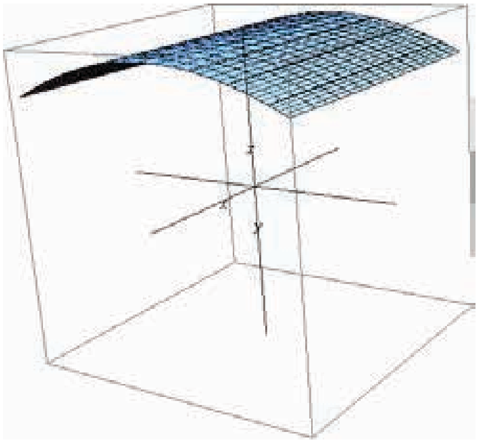
Definición 2.1.7. *El **área de una región** plana elemental D es la integral doble de la función 1, esto es*

$$A(D) = \iint_D 1\, dA = \iint_D 1\, dxdy. \tag{2.1.6}$$

Definición 2.1.8. *Dada una función $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, su **gráfico** es el conjunto del espacio definido como*

$$\begin{aligned} gr(f) &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A,\ z = f(x, y)\right\} \\ &= \left\{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in A\right\}. \end{aligned}$$

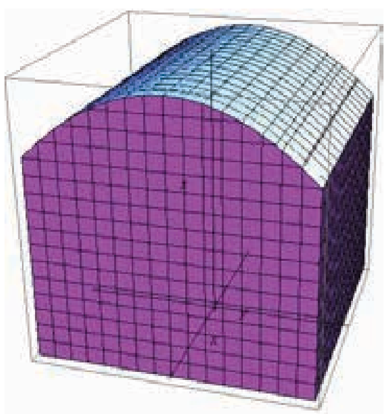
Figura 2.1: Gráfico de una función $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \geq 0$ en el espacio



Definición 2.1.9. *Si D es una región elemental del plano y $f : D \to \mathbb{R}$ es una función tal que $f(x,y) \geq 0, \forall (x,y) \in D$, entonces, calcular la integral doble $\iint_D f\, dxdy$ es igual a calcular el volumen encerrado entre el gráfico de f y la región D en el plano xy en $\mathbb{R}^3$ (ver figura 2.2). Es decir*

$$Vol = \iint_D f\, dxdy. \tag{2.1.7}$$

Figura 2.2: Región encerrada entre el gráfico de una función f y su dominio D



De acuerdo con las definiciones de área y volumen encerrado, como la función $f(x, y) = 1$ es estrictamente positiva se tiene que

$$A(D) = \iint_D 1\, dxdy$$

es igual al volumen encerrado entre el gráfico de la función (que será el plano $z = 1$) sobre el dominio D.

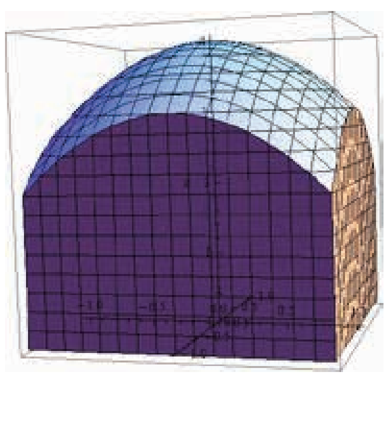
Ejemplo 2.1.10. Calcular el volumen encerrado entre el rectángulo del plano xy $[-1, 1] \times [-1, 1]$ y la función $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$.

La función f es positiva, dado que $-1 \leq x, y \leq 1$ y, entonces, $x^2 + y^2 \leq 1 + 1 = 2 \Rightarrow 4 - (x^2 + y^2) \geq 4 - 2 = 2 > 0$. De modo que, por la ecuación 2.1.7

$$\begin{aligned}
\text{Vol} &= \iint_R f(x, y)\, dxdy = \int_{-1}^{1} \left[\int_{-1}^{1} 4 - (x^2 + y^2)\, dx \right] dy \\
&= \int_{-1}^{1} \left[4x - \frac{x^3}{3} - x.y^2 \right]_{x=-1}^{x=1} dy = \int_{-1}^{1} \left[4 - \frac{1}{3} - y^2 - (-4 + \frac{1}{3} + y^2) \right] dy \\
&= \int_{-1}^{1} \left[8 - \frac{2}{3} - 2.y^2 \right] dy = \left[(8 - \frac{2}{3}).y - \frac{2.y^3}{3} \right]_{-1}^{1} \\
&= 8 - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} - \left[-8 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right] = 16 - \frac{8}{3} \geq 0.
\end{aligned}$$

Obsérvese la importancia de que el resultado sea no negativo, dado que se está calculando un volumen y, como f no es constantemente nula, tiene que ser estrictamente mayor a 0, ya que la región tendrá volumen no nulo.

Figura 2.3: Región encerrada entre $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ y $[-1, 1]x[-1, 1]$



Ejemplo 2.1.11. Calcular $\iint_R f(x,y)\,dxdy$ si $R=[0,2]\times[0,4]$ y

$$f(x,y)=\begin{cases} e^x & \text{si} \quad x \neq y \\ 0 & \text{si} \quad x = y. \end{cases}$$

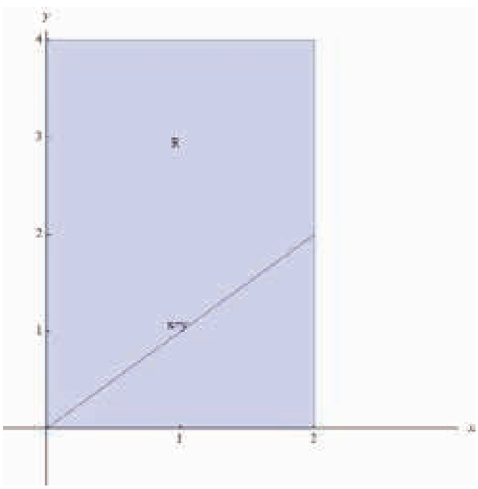
La función f es claramente discontinua en toda la recta $y=x$, los puntos de la forma (x,x). Si se considera la función restringida al rectángulo R, se tiene que resulta discontinua en todo un segmento de este, los (x,x) tales que $0\le x\le 2$. A pesar de ello, la integral doble podrá calcularse sin inconvenientes, dado que la región sobre la que es discontinua f es un segmento (de área nula), por lo que se aplica el resultado anterior y

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy=\iint_R \bar{f}(x,y)\,dxdy,$$

siendo $\bar{f}(x,y)=e^x$. Entonces,

$$\begin{aligned}\iint_R f(x,y)\,dxdy &= \int_0^4\int_0^2 e^x\,dxdy=\int_0^4 e^x\big|_{x=0}^{x=2}\,dy\\ &= \int_0^4 e^2-1\,dy=(e^2-1).y\big|_0^4=4(e^2-1).\end{aligned}$$

Figura 2.4: Rectángulo R y el segmento en el que f es discontinua



Ejemplo 2.1.12. Calcular $\iint_S f\,dxdy$, siendo $f(x,y)=x+1$ y

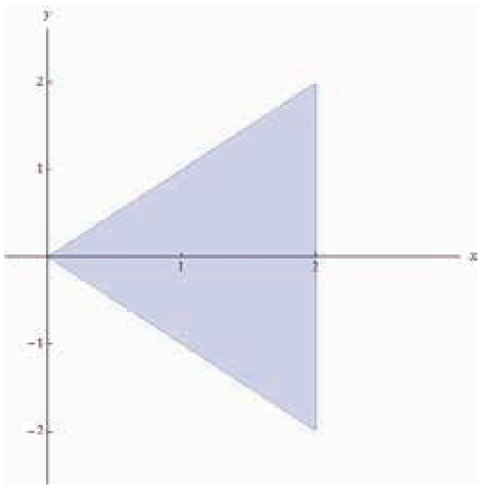
$$S=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\,-x\le y\le x, 0\le x\le 2\right\}.$$

La región S es un triángulo (ver figura 2.5) y está expresada como una región de tipo I, ya que la variable x es independiente, en tanto y está limitada por dos funciones de x, $g_1(x) = -x$ y $g_2(x) = x$ (dos funciones lineales). Entonces, por el método de integración iterada

$$\iint_S f\,dxdy = \int_0^2 \left[\int_{-x}^{x} x+1\,dy\right] dx = \int_0^2 [x.y+y]_{y=-x}^{y=x}\,dx = \int_0^2 x^2+x+(x^2+x)dx$$

$$= \int_0^2 2x^2+2x\,dx = \left[\frac{2x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}\right]_0^2 = 2.\frac{2^3}{3}+2.\frac{2^2}{2} = \frac{28}{3}.$$

Figura 2.5: Región S del Ejemplo 2.1.12



Ejemplo 2.1.13. Dada la región

$$D = \left\{(x,y):\ 0 \le x \le 1\,,\ x^2 \le y \le 1\right\},$$

calcular $\iint_D x.e^{y^2}\,dA$

La región D es la correspondiente a la figura 2.6. Está expresada como región de tipo I, de modo que la integral se plantea:

$$\iint_D x.e^{y^2}\,dA = \int_0^1 \left[\int_{x^2}^{1} x.e^{y^2}\,dy\right] dx.$$

El problema es que, planteada de esta manera, la integral doble no se puede calcular por el método de integración iterada, puesto que la función $x.e^{y^2}$ es una función que no tiene primitiva elemental respecto de y (recordar integración en una sola variable). Esto motiva que se

realice un cambio en el orden de integración, es decir, expresar a D como una región de tipo II (lo que, en consecuencia, la convertiría en una de tipo III). Esto se puede hacer sin dificultad, si es que ahora se empieza a observar a y como variable independiente y a x como dependiente de funciones de y, que equivale a "invertir los ejes del plano real" (ver figura 2.7). El gráfico muestra que $0 \leq y \leq 1$ y que x va desde el eje y hasta la parábola, que se expresaba como $y = x^2$. Como $x \geq 0$ se despeja a x en función de y, quedando $x = \sqrt{y}$, de modo que D se expresa como región de tipo II de la siguiente manera:

$$D = \begin{cases} 0 & \leq y \leq 1 \\ 0 & \leq x \leq \sqrt{y}. \end{cases}$$

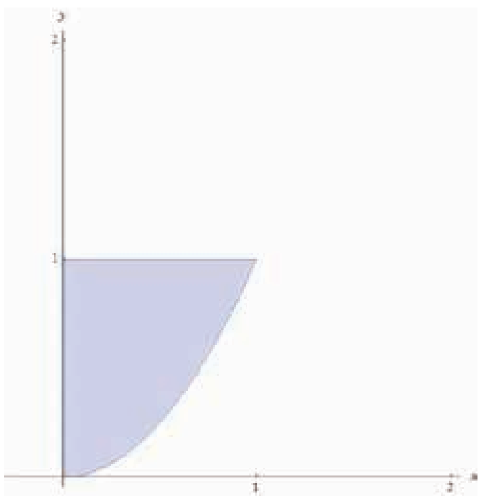
Con esto, se procede a calcular la integral en cuestión:

$$\iint_D x.e^{y^2}\,dA = \int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{y}} x.e^{y^2}\,dx\right] dy = \int_0^1 \left[\frac{x^2.e^{y^2}}{2}\right]_0^{\sqrt{y}} dy = \int_0^1 \frac{y.e^{y^2}}{2}\,dy,$$

si se hace la sustitución

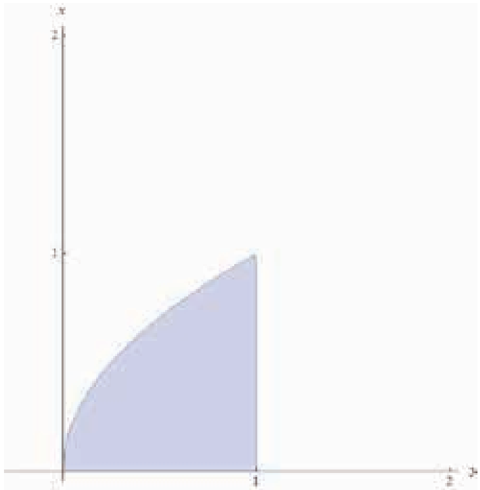
$$\left.\begin{array}{c} t = y^2 \;\Rightarrow t = 0^2, t = 1^2 \\ dt = 2y\,dy \;\Rightarrow \frac{dt}{2} = dy \end{array}\right\} \Rightarrow \int_0^1 \frac{e^t}{4}\,dt = \left.\frac{e^t}{4}\right|_0^1 = \frac{e-1}{4}.$$

Figura 2.6: Región D



Como se pudo observar de este ejemplo, el cambio en el orden de integración resulta muy útil al momento de integrar ciertas funciones que no resultan integrables en el orden original.

Figura 2.7: Región D vista con ejes invertidos



Ejemplo 2.1.14. Calcular el área de la región S del ejemplo 2.1.12.

Para calcular el área de ese triángulo solo hay que calcular

$$\iint_S 1\,dxdy = \int_0^2 \left[\int_{-x}^{x} 1\,dy\right] dx = \int_0^2 y|_{y=-x}^{y=x} dx = \int_0^2 2x\,dx = 2\frac{x^2}{2}\bigg|_0^2 = 4.$$

Queda para el lector verificar que este resultado coincida con la fórmula de área de triángulo aplicada a este caso. Otro ejercicio que generaliza esto es el siguiente.

Ejercicio 2.1.15. Verificar que para un triángulo de base a y altura b, como el de la figura 2.8, se cumple la siguiente igualdad:

$$\iint_T 1\,dxdy = \frac{b.a}{2}.$$

Ejemplo 2.1.16. Calcular el área de la región sombreada D correspondiente a la figura 2.9.

En este caso, se trata de una región que no es elemental, aunque sí está compuesta por regiones que sí lo son, pues puede separarse, por ejemplo, en rectangulitos. Es decir que la región D es unión de regiones elementales y por ello se puede calcular su área. Si

$$D_1 = (x, y) : \ 0 \leq x \leq 1\,,\, 0 \leq y \leq 1,$$

$$D_1 = (x, y) : \ 1 \leq x \leq 2\,,\, -1 \leq y \leq 3,$$

$$D_1 = (x, y) : \ -1 \leq x \leq 0\,,\, 2 \leq y \leq 4,$$

Figura 2.8: Triángulo de base a y altura b

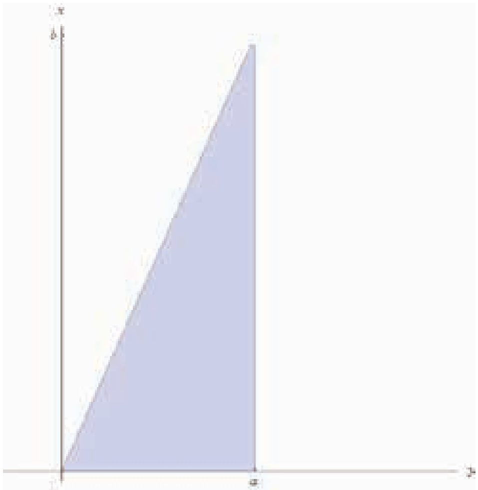
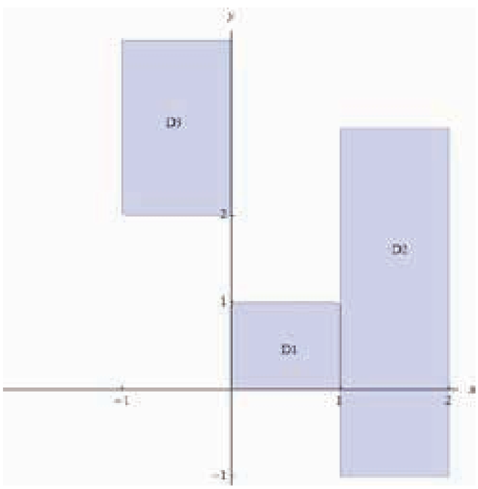


Figura 2.9: Región combinada



resulta que

$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3.$$

De modo que

$$A(D) = A(D_1) + A(D_2) + A(D_3).$$

$$\begin{cases} A(D_1) &= \iint_{D_1} 1\,dxdy = \int_0^1 \left[\int_0^1 1\,dx\right] dy = (1-0).(1-0) = 1 \\ A(D_2) &= \iint_{D_2} 1\,dxdy = \int_{-1}^3 \left[\int_1^2 1\,dx\right] dy = (2-1).(3-1) = 1{,}2 = 2 \\ A(D_3) &= \iint_{D_3} 1\,dxdy = \int_2^4 \left[\int_{-1}^0 1\,dx\right] dy = (0-(-1)).(4-2) = 2 \end{cases},$$

entonces, $A(D) = 1 + 2 + 2 = 5.$

Observación 2.1.17. (Una nota de color no por ello menos importante).

Se sabe que el área de un disco o círculo se calcula con la fórmula $\pi.a^2$, siendo $a > 0$ el radio del mismo. De acuerdo con la definición de área hecha en (2.1.6), el área también es la integral doble sobre el disco de la función 1. Juntando estas dos cosas se obtiene que

$$\pi.a^2 = \iint_D 1\,dxdy,$$

y si ese disco tiene centro en el origen podemos describirlo como

$$D = \begin{cases} -a \leq x \leq a \\ -\sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}, \end{cases}$$

ya que cumple la desigualdad $x^2 + y^2 \leq a^2$ (¡a está fijo, es el radio!). Entonces:

$$\begin{aligned} \pi.a^2 &= \int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} 1\,dy\,dx = \int_{-a}^{a} [y]_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx \\ &= \int_{-a}^{a} 2.\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = 2.\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx. \end{aligned}$$

O sea que

$$\pi.a^2 = 2.\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx \Rightarrow \frac{\pi.a^2}{2} = \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$$

Esto da el resultado de una integral en una sola variable que no resultaba fácil de calcular de manera directa.

2.1.1. Práctica

1) Calcular las integrales de las siguientes funciones sobre los conjuntos indicados.

(I) $f(x, y) = 3, \quad R = [-3, 2] \times [0, 5].$

(II) $f(x, y) = -2, \quad R = [0, 2] \times [-1, 1].$

(III) $f(x,y) = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 1 \quad \text{y } 0 \leq y \leq 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 2 \quad \text{y } 0 \leq y \leq 1 \\ 1 & \text{si} \quad 2 \leq x \leq 3 \quad \text{y } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 3 \quad \text{y } 1 \leq y \leq 2 \end{cases}, \quad R = [-1, 3] \times [0, 2]$

2) Sean f y g dos funciones definidas en $R = [1,5] \times [1,2]$ por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \quad \text{y } 1 \leq y \leq 2 \\ 2 & \text{si } 3 \leq x \leq 4 \quad \text{y } 1 \leq y \leq 2 \\ 3/2 & \text{si } 4 \leq x \leq 5 \quad \text{y } 1 \leq y \leq 2 \end{cases} \quad \text{y}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \quad \text{y } 1 \leq y \leq 2 \\ 2 & \text{si } 3 \leq x \leq 5 \quad \text{y } 1 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

¿Es posible afirmar que $\displaystyle\iint_R f(x,y)\ dx\, dy \leq \iint_R g(x,y)\ dx\, dy$ sin calcular las integrales? Justificar.

3) Calcular las siguientes integrales iteradas.

(I) $\int_{-1}^{1} \left(\int_0^1 x^4 y + y^2\ dx \right) dy$

(II) $\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 y \cos x + 2\ dy \right) dx$

(III) $\int_0^1 \left(\int_0^1 x e^{xy}\ dy \right) dx$

(IV) $\int_{-1}^{0} \left(\int_1^2 -x \ln y\ dy \right) dx$

4) Calcular los siguientes volúmenes.

(I) Sólido delimitado por el gráfico de la superficie $z = \cos y$ y los planos $x = -2$, $x = 2$, $y = -\pi/2$ e $y = 0$.

(II) Sólido delimitado por la superficie $z = x^2 + y$ y el cuadrado $[0,1] \times [1,2]$ y los lados verticales de dicho cuadrado.

5) Graficar las regiones D del plano asociadas a cada una de las siguientes integrales iteradas y calcularlas.

(I) $\int_0^1 \left(\int_1^{e^x}\ dy \right) dx$

(II) $\int_0^1 \left(\int_0^{2x} xy\ dy \right) dx$

(III) $\int_0^1 \left(\int_{x^3}^{x^2} y\ dy \right) dx$

(IV) $\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\cos x} y \operatorname{sen} x\ dy \right) dx$

(V) $\int_0^1 \left(\int_{-y}^{y} x^2\ dx \right) dy$

(VI) $\int_{-1}^{1} \left(\int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y} dy \right) dx$

6) Calcular $\iint_D f(x,y)\ \ dx\, dy$ en los siguientes casos.

a) $f(x,y) = 1 + xy$ y D la región limitada por el eje y y la parábola de ecuación $x = -4y^2 + 3$.

b) $f(x,y) = 1 + xy$ y $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 2,\ y \geq 0\}$.

c) $f(x,y) = y$ y $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq \pi/2,\ 0 \leq y \leq \operatorname{sen} x\}$.

d) $f(x,y) = 2x - 2y$ y D el triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,3)$ y $(3,1)$.

e) $f(x,y) = x^2 + 2xy + 2$ y D la región limitada por el gráfico de $y = x^2 + x$, el eje x y las rectas de ecuación $x = 0$ y $x = 2$.

2.2. Integrales triples

A continuación veremos algunas definiciones en $\mathbb{R}^3$ análogas a las realizadas en la sección anterior.

Definición 2.2.1. *Una función $f : B \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ se dice que es **integrable** si resulta continua en todo B salvo, quizás, en una región de volumen nulo (o sea, sobre una superficie).*

Definición 2.2.2. *Sea $f : B \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función integrable y sea Q, un paralelepípedo. Se define la **integral triple de f sobre Q** como*

$$\iiint_Q f\,dV = \lim_{m,n,s\to\infty} \sum_{l=1}^{s}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_j, z_l)\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_l, \tag{2.2.1}$$

con $\Delta x_i = |x_{i+1} - x_i|$, $\Delta y_j = |y_{j+1} - x_j|$ y $\Delta z_l = |z_{l+1} - z_l|$, que son los tamaños de los lados correspondientes al paralelepípedo $Q_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_l, z_{l+1}]$, para cada i, j, l.

Nuevamente, el límite que aparece en la ecuación 2.2.1 es el correspondiente al de las *sumas de Riemann* y podría no existir o ser infinito en caso de que la función no sea integrable (ver definición 2.1.1).

La forma de operar con la integral triple definida en la ecuación (2.2.1) es a partir de la noción de integrales en una sola variable iteradas.

Definición 2.2.3. *Sea $f : B \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función integrable y sea $Q = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$, un paralelepípedo. Se define la **integral iterada de f sobre Q** como*

$$\begin{aligned}\iiint_Q f\,dV &= \iiint_Q f\,dxdydz = \int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x,y,z)\,dydx \\ &= \int_a^b \left[\int_c^d \left[\int_e^f f(x,y,z)\,dz\right] dy\right] dx.\end{aligned} \tag{2.2.2}$$

La idea es primero tomar a las variables x e y como constantes e integrar en primera instancia con respecto a z, que es hacer una integral unidimensional. Al evaluar quedará una integral doble para calcular, sin la variable z, y resta integrar respecto de y y luego respecto de x.

Las integrales triples iteradas también cumplen las propiedades de linealidad, aditividad y comparación mencionadas para integrales dobles en el teorema 2.1.5.

Ejemplo 2.2.4. Calcular $\iiint_Q x^2 + y\,dxdydz$, siendo $Q = [0, 1] \times [0, 2] \times [1, 3]$.
La función $f(x, y, z) = x^2 + y$ es una función continua en todo $\mathbb{R}^3$, de modo que, por el

teorema anterior:

$$\begin{aligned}
\iiint_Q x^2 + y\,dxdydz &= \int_1^3 \left[\int_0^1 \left[\int_0^2 x^2 + y\,dy\right] dx\right] dz \\
&= \int_1^3 \left[\int_0^1 \left[y.x^2 + \frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=2} dx\right] dz \\
&= \int_1^3 \left[\int_0^1 \left[2.x^2 + \frac{8}{3}\right] dx\right] dz = \int_1^3 \left[2.\frac{x^3}{3} + \frac{8}{3}.x\right]_{x=0}^{x=1} dz \\
&= \int_1^3 \frac{10}{3}\,dz = \frac{10}{3}.z|_1^3 = \frac{20}{3}.
\end{aligned}$$

Si se considera ahora una región $W \subseteq \mathbb{R}^3$ acotada, y se tiene una $f : W \to \mathbb{R}^3$, también se puede extender la definición de integral triple a regiones más generales siguiendo las ideas descriptas para integrales dobles. Finalmente, no es difícil arribar a las siguientes definiciones, en analogía con el caso de dos variables.

Definición 2.2.5. *Sea $f : B \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función integrable y sea $W \subseteq B$, una región elemental de tipo I en el espacio. Se define la* ***integral triple de f sobre W*** *como*

$$\iiint_W f\,dxdydz = \int_a^b \left[\int_{t_1(x)}^{t_2(x)} \left[\int_{r_1(x,y)}^{r_2(x,y)} f(x,y)\,dz\right] dy\right] dx \tag{2.2.3}$$

si W está descripta como

$$W = \begin{cases} a \leq x \leq b \\ t_1(x) \leq y \leq t_2(x) \\ r_1(x,y) \leq z \leq r_2(x,y). \end{cases}$$

Se opera con esta integral iterada de la siguiente manera: primero se toman las variables x e y como constantes y se integra en primera instancia con respecto a z, que es hacer una integral unidimensional. Al evaluar quedará una segunda integral para calcular, pero la variable z habrá desaparecido, por lo cual resta hacer una integral doble respecto de y primero y luego de x.

Análogamente se pueden definir iterativamente integrales dobles sobre regiones de tipo II y III, pero es muy similar a lo que se acaba de definir, por lo que solamente se enunciará la definición de integrales sobre regiones de tipo IV.

Teorema 2.2.6. *Sea $f : B \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función integrable y sea W, una región elemental de tipo IV. Se define la integral triple de f sobre W como*

$$\iiint_W f\,dV = \iiint_W f\,dxdydz = \int_a^b \left[\int_{t_1(x)}^{t_2(x)} \left[\int_{r_1(x,y)}^{r_2(x,y)} f(x,y)\,dz\right] dy\right] dx, \tag{2.2.4}$$

$$\iiint_W f\,dV = \iiint_W f\,dxdydz = \int_c^d \left[\int_{s_1(y)}^{s_2(y)} \left[\int_{l_1(y,z)}^{l_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx\right] dz\right] dy \tag{2.2.5}$$

Es decir, que si la región es de tipo IV, se puede integrar en cualquier orden, pero es preciso estar atentos, porque si W es de tipo IV y está descripta como de tipo I de la siguiente manera

$$W = \begin{cases} a \leq x \leq b \\ t_1(x) \leq y \leq t_2(x) \\ r_1(x,y) \leq z \leq r_2(x,y), \end{cases}$$

se la debe integrar como de tipo I, para cambiar el orden de integración hay que cambiar siempre la descripción. Lo que estaría mal es hacer algo como lo siguiente:

$$\int_{t_1(x)}^{t_2(x)} \left[\int_a^b \left[\int_{r_1(x,y)}^{r_2(x,y)} f(x,y)\, dz \right] dx \right] dy,$$

pues incluso esta integral daría una función, siendo que se están calculando integrales definidas y no primitivas.

Cabe destacar que las propiedades de linealidad, aditividad y de comparación también valen para integrales triples, pero no serán enunciadas.

Una región que en principio no sería elemental podría ser (aunque no en todos los casos) unión de regiones elementales no encimadas entre sí, es decir que a lo sumo comparten un borde o superficie en común (una “pared”, es decir, una región de volumen igual a 0).

Ejemplo 2.2.7. Calcular $\iiint_W 2x^2\, dzdxdy$, siendo

$$W = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 1, |y-2| \leq 3, 0 \leq z \leq 1 \right\}.$$

Notar en primer lugar que la región W es un paralelepípedo, ya que la condición sobre x dice que $-1 \leq x \leq 1$, en tanto la condición sobre y es que $-3 \leq y-2 \leq 3 \Rightarrow -1 \leq y \leq 5$ y la condición sobre z está dada de manera explícita. La región W es una región de tipo IV, ya que puede expresarse como de tipo I, II o III indistintamente, dado que son todos los límites de las variables funciones constantes.

Entonces, expresada como de tipo I la integral queda

$$\int_{-1}^{5}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1} 2x^2\, dzdxdy \underbrace{=}_{\text{integro respecto de z}} \int_{-1}^{5}\int_{-1}^{1} 2x^2 z\Big|_{z=0}^{z=1} dxdy$$

$$= \int_{-1}^{5}\int_{-1}^{1} 2x^2\, dxdy \underbrace{=}_{\text{integro respecto de x}} \int_{-1}^{5} \left.\frac{2x^3}{3}\right|_{x=-1}^{x=1} dy$$

$$\underbrace{=}_{\text{linealidad}} \frac{4}{3}\int_{-1}^{5} 1\, dy = \frac{4}{3}(5+1) = 8.$$

Ejemplo 2.2.8. Calcular $\iiint_C f\, dV$, si f está definida por

$$f(x,y,z) = \begin{cases} x+y+z & \text{si} \quad z=1 \\ 0 & \text{si} \quad z \neq 1 \end{cases}$$

y $C = [0, 2] \times [-1, 4] \times [-1, 0]$.

La función f es discontinua en C, específicamente en una porción rectangular del plano $z = 1$ con $x \in [0, 2]$ e $y \in [-1, 4]$. Pero un rectángulo es una región de contenido nulo, ya que tiene volumen igual a 0 (es una superficie y una región plana), entonces:

$$\begin{aligned}
\iiint_C f\,dV &= \iiint_C x + y + z\,dxdydz = \int_0^2 \left[\int_{-1}^4 \left[\int_{-1}^0 x + y + z\,dz\right] dy\right] dx \\
&= \int_0^2 \left[\int_{-1}^4 \left[x.z + y.z + \frac{z^2}{2}\right]_{z=-1}^{z=0} dy\right] dx = \int_0^2 \left[\int_{-1}^4 \left[x + y - \frac{1}{2}\right] dy\right] dx \\
&= \int_0^2 \left[xy + \frac{y^2}{2} - \frac{y}{2}\right]_{y=-1}^{y=4} dx = \int_0^2 5x + 5\,dx \\
&= \frac{5}{2}x^2 + 5x\Big|_0^2 = 10 + 10 = 20.
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.2.9. Calcular $\iiint_W 2y\,dxdydz$, siendo

$$W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\,,\ 0 \leq y \leq 1\,,\ 0 \leq z \leq cos(x)\right\}.$$

La región W es la correspondiente a la figura 2.10. De acuerdo con la ecuación (2.2.4), tenemos que:

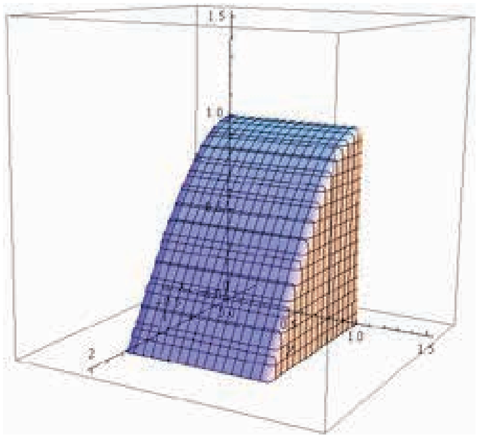
$$\begin{aligned}
\iiint_W 2y\,dxdydz &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^1 \left[\int_0^{cos(x)} 2y\,dz\right] dy\right] dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^1 [\,2y.z]_{z=0}^{z=cos(x)}\,dy\right] dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^1 2y.cos(x)\,dy\right] dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[y^2.cos(x)\,\right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(x)\,dx \\
&= sen(x)|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.
\end{aligned}$$

Definición 2.2.10. *Sea W una región elemental de $\mathbb{R}^3$ (o unión de regiones elementales no encimadas). Se define el **volumen de** W como*

$$Vol(W) := \iiint_W 1\,dV. \tag{2.2.6}$$

Ejemplo 2.2.11. Si se calcula el volumen de la región W del ejemplo 2.2.9, de acuerdo con la

Figura 2.10: Región
$W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq cos(x)\right\}$



definición 2.2.10 se obtiene

$$\begin{aligned}
\text{Vol}(W) &= \iiint_W 1\, dxdydz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^1 \left[\int_0^{cos(x)} 1\, dz\right] dy\right] dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^1 z|_{z=0}^{z=cos(x)}\, dy\right] dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^1 cos(x)\, dy\right] dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [y.cos(x)]_{y=0}^{y=1}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(x)\, dx \\
&= sen(x)|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.2.12. Si W es una región del espacio, definida como

$$W = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\},$$

y $f(x, y, z) = z$, entonces calcular $\iiint_W f\, dxdydz$.

De acuerdo con lo visto en el primer capítulo, esta región es una bola de radio 1 y centro en $(0, 0, 0)$, cuyo gráfico es la figura 1.72 del ejemplo 1.2.43. De acuerdo con la ecuación (1.2.14), una descripción de esta bola es:

$$\begin{cases}
-1 \leq x \leq 1 \\
-\sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2} \\
-\sqrt{1 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}.
\end{cases}$$

De modo que la integral se plantea de la siguiente manera:

$$\iiint_W f\,dxdydz = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\,dz\,dy\,dx.$$

Y la resolvemos

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{z=\sqrt{1-x^2-y^2}} dy\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{\left(-\sqrt{1-x^2-y^2}\right)^2-\left(\sqrt{1-x^2-y^2}\right)^2}{2}\,dy\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 0\,dxdy = 0.$$

Da 0 ya que la integral definida de la función nula es 0 (pues su primitiva es una constante y por regla de Barrow se suma y se resta a ella misma).

Si se hubiera integrado en otro orden, por ejemplo primero respecto de y (si hubiéramos expresado a y como la variable que va entre dos funciones de x, z), las cuentas hubieran sido más largas, aunque el resultado final sería el mismo (por el teorema de Fubini). Esto sugiere que antes de ponerse a describir y a calcular integrales ciegamente conviene mirar un poco la región y la función a integrar, verdaderamente, se puede ahorrar gran cantidad de cuentas (y preocupaciones).

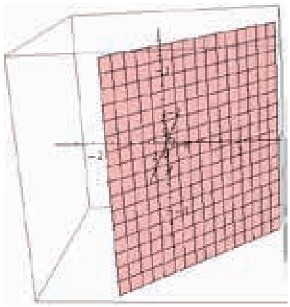
Ejemplo 2.2.13. Sea W la región del primer octante acotada por los planos $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 2$, $2y + x = 6$ y el cilindro $y^2 + z^2 = 4$. Si $f(x, y, z) = z$, calcular $\iiint_W f\,dV$.

Este es un claro ejemplo de una región mixta que es un poco más difícil de graficar. Lo que conviene hacer en este caso es ir visualizando poco a poco.

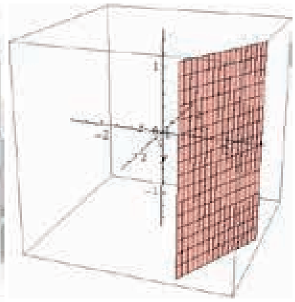
- Se tienen 4 planos: los dos primeros, de ecuaciones implícitas $y = 0$, $z = 0$, son los planos que tienen como direcciones a los ejes x y z, en el primer caso, en tanto que para el segundo lo son x e y. Como ya hemos trabajado con ellos no los graficaremos aparte, pero sí los tendremos en cuenta para el gráfico de la región. Los dos restantes se pueden graficar como en la figuras 2.11a y 2.11b.
- $y^2+z^2 = 4$ es la cáscara de un cilindro circular de radio 2 con eje de simetría en el eje x, dado que para cada $x \in \mathbb{R}$ se tiene la misma ecuación que describe una circunferencia. Si se combina el gráfico del cilindro macizo ($y^2 + z^2 \leq 4$) con el hecho de que la región se encuentra en el primer cuadrante queda un cuarto de este mismo, como en la figura 2.11c.

Si a continuación se combinan los gráficos, lo que se obtiene es el gráfico de la figura 2.12. Esta región es un cuarto de cilindro cortado por dos planos no paralelos que son $x + y = 2$ y $2y + x = 6$. Asimismo hay que pensar cómo describirlo como región elemental (si es que se puede), o como unión de regiones elementales. Para ello se puede observar que las tres sombras de W

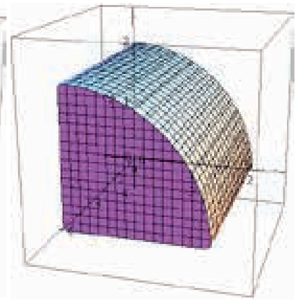
Figura 2.11: Planos $x + y = 2$, $2y + x = 6$ y cilindro en el primer octante



(a) Plano $x + y = 2$

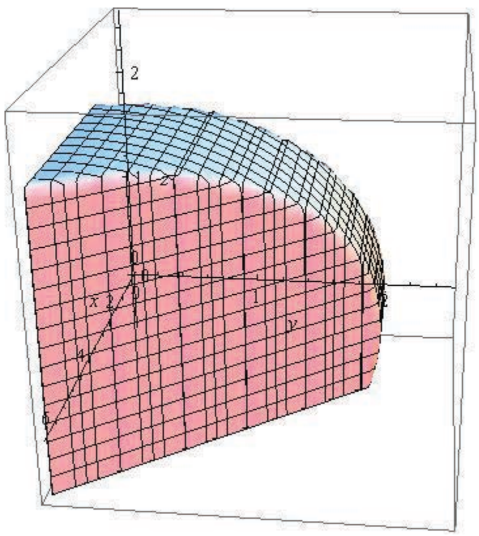


(b) Plano $2y + x = 6$



(c) Cilindro $y^2 + z^2 \leq 4$ en el primer octante

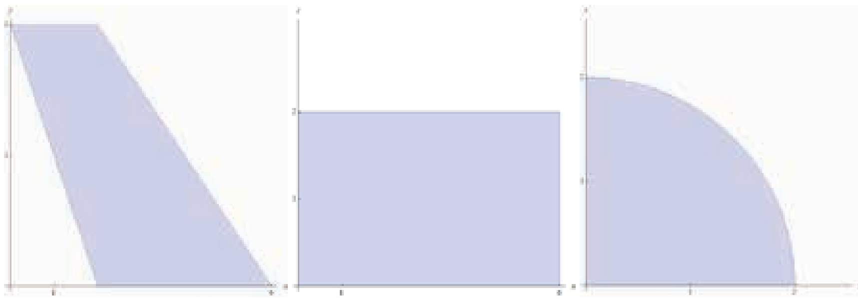
Figura 2.12: Región del primer octante acotada $x + y = 2$, $2y + x = 6$ y $y^2 + z^2 = 4$



(sobre $z = 0$, $x = 0$ o $y = 0$) dan regiones planas muy distintas. En el caso $z = 0$ es la de la figura 2.13a, en tanto para $y = 0$ el gráfico de la sombra es la correspondiente a la figura 2.13b. En el primer caso ($z = 0$), se puede ver que no se trata de una región elemental del plano (pero sí unión de tales tipos), por lo que describirla resultaría algo engorroso (habría que dividirla en regiones que sí sean elementales y describir cada una de ellas). Por otro lado, la sombra en el plano $y = 0$ (ver figura 2.13b) es un rectángulo, pero el problema no es describirla a esta sino

Figura 2.13: Sombras de la región del primer octante acotada por $x + y = 2$, $2y + x = 6$ y $y^2 + z^2 = 4$

(a) Sombra en $z = 0$ **(b) Sombra en** $y = 0$ **(c) Sombra en** $x = 0$



en el hecho de que la variable y luego no quedará entre dos funciones únicas de x y de z, por lo que habría que seccionar a la región. No obstante, lo que queda es observar la sombra en el plano $x = 0$, que es la correspondiente a la figura 2.13c. Se puede notar que esta se trata de un cuarto de disco con centro en el origen y radio 2 (equivalente a la sombra del cuarto de cilindro). Describir esta tercera sombra resulta mucho más familiar, así que eso es lo que conviene hacer:

$$\begin{cases} 0 & \leq y \leq 2 \\ 0 & \leq z \leq \sqrt{4 - y^2}. \end{cases}$$

Ahora hay que hallar los límites superior e inferior de la variable x respecto de y y z. Para ello, observar que la región vista así tiene como piso y techo únicamente los planos $x + y = 2$ y $2y + x = 6$, respectivamente. Por lo cual se puede pensar que x va “desde un plano hasta el otro” y de las ecuaciones implícitas de cada uno de ellos sale que $x = 2 - y$, $x = 6 - 2y$. Finalmente queda:

$$W = \begin{cases} 0 & \leq y \leq 2 \\ 0 & \leq z \leq \sqrt{4 - y^2} \\ 2 - y & \leq x \leq 6 - 2y, \end{cases}$$

así que la integral quedará planteada como

$$\iiint_W f\, dV = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \int_{2-y}^{6-2y} z\, dx\, dz\, dy$$

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} [zx]_{x=2-y}^{x=6-2y}\, dz\, dy = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} z(4 - y)\, dz\, dy$$

$$= \int_0^2 \left[\frac{z^2}{2}(4 - y) \right]_{z=0}^{z=\sqrt{4-y^2}} dy = \int_0^2 \frac{1}{2}(4 - y)(4 - y^2)\, dy$$

$$= \int_0^2 8 - 2y^2 - 2y + \frac{y^3}{2}\, dy = \left[8y - \frac{2}{3}y^3 - y^2 + \frac{y^4}{8}\right]_0^2 = \frac{14}{3}.$$

Ejemplo 2.2.14. Calcular el volumen de la bola unitaria con centro en el origen.
Para este caso, por el ejemplo 2.2.12 se tiene ya un gráfico y una descripción de la región, así que el volumen, de acuerdo con la ecuación (2.2.6), se calcula como:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(W) &= \iiint_W 1\, dV = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} 1\, dz\, dy\, dx \\ &= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} z\Big|_{z=-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{z=\sqrt{1-x^2-y^2}}\, dy\, dx \\ &= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 2\sqrt{1-x^2-y^2}\, dy\, dx. \end{aligned}$$

Lo que ha quedado es una integral que no se sabe bien cómo resolver. Aún haciendo cambios en los órdenes de integración (cambiando la descripción de la región) se llegará al mismo problema.

Este simple ejemplo muestra las limitaciones que tenemos en el momento de integrar en varias variables y, así como en una sola variable se tenía el método de integración por sustitución es oportuno preguntar si existe un método análogo en varias variables. El próximo capítulo tratará este método, que se llamará *cambio de variables*.

2.2.1. Práctica

1) Calcular $\iiint_W f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$ en los siguientes casos.

(I) $W = [0,2] \times [0,1] \times [0,3]$, $f(x,y,z) = x^3$

(II) $W = [1,3] \times [-1,1] \times [0,2]$, $f(x,y,z) = x + y + 2z$

(III) $W = [1,3] \times [-2,1] \times [0,\pi/2]$, $f(x,y,z) = (x^2+y^2)\cos z$

2) Calcular las siguientes integrales iteradas.

(I) $\int_0^1 \left(\int_0^y \left(\int_0^{e^{y+z}-1} \frac{1}{1+x} dx\right) dz\right) dy$ (II) $\int_0^1 \left(\int_0^x \left(\int_0^y (y+xz) dz\right) dy\right) dx$

(III) $\int_0^2 \left(\int_0^x \left(\int_0^{x+y} dz\right) dy\right) dx$ (IV) $\int_1^2 \left(\int_1^z \left(\int_{1/y}^2 yz^2 dx\right) dy\right) dz$

3) Calcular $\iiint_W f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$ en los siguientes casos.

a) W la región acotada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 3$ y la superficie $z = x^2 + y^2$, con $x, y \geq 0$ y $f(x,y,z) = x$.

b) $W = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$ y $f(x, y, z) = xyz$.

c) $W = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$ y $f(x, y, z) = y$.

d) $W = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 - z^2 \leq 0; x, y \geq 0, 0 \leq z \leq 2\}$ y $f(x, y, z) = x + y$.

4) Calcular el volumen de W en los siguientes casos.

a) $W = \{(x, y, z) : x + y + z \leq 1,\ x, y, z \geq 0\}$

b) $W = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z,\ 0 \leq z \leq 9\}$

c) $W = \{(x, y, z) : z \leq 5 - 2x^2,\ 2x + y \leq 1,\ x, y, z \geq 0\}$

d) W es el cuerpo limitado por $z = xy$, el cilindro $y = \sqrt{2x}$ y los planos $x + y = 4$, $y = 0$, $z = 0$.

Capítulo 3

Teorema de cambio de variables

3.1. Introducción

La definición de integral múltiple sobre una función escalar (una función $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n = 2, 3$) a la que se ha arribado en el capítulo anterior nos proporciona un método para calcular dichas integrales. Pudimos visualizar esto con los ejemplos de integrales dobles y triples que trabajamos en el capítulo 2.

No obstante, en el ejemplo 2.2.14 no pudimos terminar de calcular la integral pedida dado que quedaba una función cuya primitiva desconocíamos. Observamos que si cambiábamos el orden de integración tampoco podíamos resolverla. De hecho, hay muchos otros casos de integrales en los que, a pesar de que salgan las primitivas, las cuentas se hacen simplemente imposibles. El ejemplo a continuación ilustra un poco estos problemas.

Ejemplo 3.1.1. Calcular $\iint_T \operatorname{sen}\left((\pi.\dfrac{y-2x}{2x+y})\right)\,dxdy$, siendo T el triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,2)$ y $(0,4)$.

Si bien la región sobre la que se integra es un triángulo, hay problemas para hallar primitivas de la función que hay que integrar respecto de x e y.

Esto nos muestra que se necesita trabajar de otra manera con este tipo de integrales, en este caso puesto que la integral no se puede calcular por los métodos convencionales. Lo que veremos en este capítulo es un método muy útil para este y muchos otros casos, llamado *cambio de variables*. La idea es llevar a dos dimensiones el método de sustitución, frecuentemente utilizado en integración definida para funciones de una variable.

3.2. Cambio de variables en $\mathbb{R}^2$

Recordemos brevemente la idea del método de sustitución para integrar funciones de una sola variable. Si se tiene la integral $\int_c^d f(t)dt$ con f una función continua y se puede pensar a

$f(t)dt = f(g(x)).g^{'}(x)dx$ con g una función con derivadas continuas en $[a,b]$ tal que $c = g(a)$ y $d = g(b)$.

Para el caso de cambio de variables queremos utilizar una idea similar, aunque el método será más laborioso porque si pensamos a las integrales múltiples como iteradas, entonces debemos realizar sustitución por cada variable sobre la que se está integrando.

Para el caso de integrales dobles, si se considera a $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, y a $x, y \in D$ como funciones de dos variables $u, v \in D^*$, es decir $x = x(u,v)$ e $y = y(u,v)$, entonces, $f(x,y) = f(x(u,v), y(u,v))$. De este modo, queremos describir la integral $\iint_D f$ como

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D^*} f(x(u,v), y(u,v)).\Theta\,dudv, \tag{3.2.1}$$

por lo que resultaría igual integrar en el dominio D que en D^*. Claro que por eso aparece Θ que es el factor de corrección de la transformación de la región, así como en una variable ese rol es llevado adelante por $g^{'}$. Como $(x(u,v), y(u,v))$ es una función vectorial de dos variables (u y v), Θ estará relacionada con la matriz jacobiana de $(x(u,v), y(u,v))$, que es la que contiene sus derivadas parciales.

Definición 3.2.1. *El **Jacobiano** de una función $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ es*

$$J(u,v) = \left| det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \right|.$$

Observación 3.2.2. $\Theta = J(u,v)$.

Con esto, finalmente queda, bajo algunas hipótesis bastante generales, el siguiente teorema.

Teorema 3.2.3. *Sean D y D^* regiones elementales de $\mathbb{R}^2$ (de tipo I, II o III) y sea $T : D^* \to D$ una función de clase C^1 e inyectiva (salvo, quizás sobre una curva) tal que $D = T(D^*)$. Entonces, para cualquier $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ integrable*

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D^*} f(x(u,v), y(u,v))J(u,v)\,dudv. \tag{3.2.2}$$

Este teorema proporciona un método muy útil y potente para resolver un abanico mucho más amplio de integrales dobles. Se puede ver su utilización en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 3.2.4. Coordenadas polares.Calcular $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$, siendo D

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\right\}.$$

En primera instancia se puede observar que D es un disco de radio 2 con centro en $(0,0)$ y sabemos que puede expresarse tanto como región de tipo I como de tipo II, por lo tanto, es una región elemental. Expresada como de tipo I queda:

$$-1 \leq x \leq 1$$

$$-\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}$$
$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}dydx.$$

Y esta integral resulta difícil de calcular, aún cambiando el orden de integración. Ahora bien, si se considera la relación trigonométrica:

$$\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1,$$

con $0 \leq \theta \leq 2\pi$, y se multiplica a ambos lados por r^2 queda

$$(r\cos\theta)^2 + (r\operatorname{sen}\theta)^2 = r^2.$$

Si se llama a $x = r\cos\theta\,,\ y = r\operatorname{sen}\theta$ queda que

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Si $0 \leq r \leq 2$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$, se está considerando todo el disco de radio menor o igual que 2 con centro en $(0,0)$, pero expresando a x, y como funciones del ángulo y del radio. En otras palabras, se está considerando un cambio de variables a las llamadas *coordenadas polares*:

$$x = x(r,\theta) = r\cos\theta\,,\ y = y(r,\theta) = r\operatorname{sen}\theta \tag{3.2.3}$$

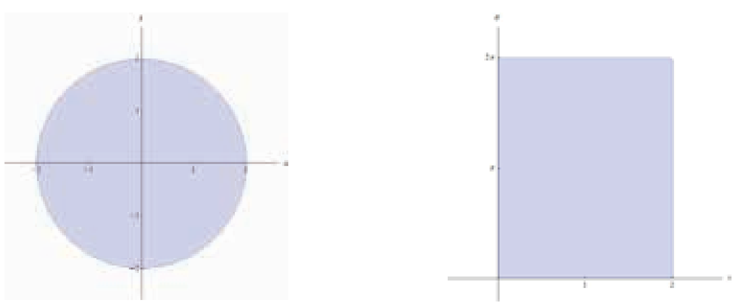
con

$$0 \leq r \leq 2\,,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi. \tag{3.2.4}$$

Figura 3.1: Regiones D y D^*

(a) Región D: disco de radio 2

(b) Región D^*: rectángulo



La región D en el plano (x,y) es un disco de radio 2 (ver figura 3.1a), en tanto, la región D^* en el plano (r,θ) es un rectángulo, pues está determinada por los límites de r y de θ, establecidos en la ecuación (3.2.4) (ver figura 3.1b). Además, la función $(x(r,\theta), y(r,\theta))$ es una función inyectiva salvo cuando θ es 0 ó π, que vale lo mismo para cada r (es inyectiva salvo en el segmento $(r,0)$, $0 \leq r \leq 2$).

Ahora que ya se tiene el cambio de variables, para calcular la integral hay que hallar $J(r,\theta)$:

$$\begin{aligned} J(r,\theta) &= \left| det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} \right| = \left| det \begin{pmatrix} cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) \\ -r\operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| r\cos^2\theta + r\operatorname{sen}^2\theta \right| = \left| r\underbrace{\left(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta\right)}_{=1} \right| \\ &= |r| \underbrace{=}_{r\leq 0} r. \end{aligned}$$

Entonces, por teorema de cambio de variables

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D^*} f(x(r,\theta),y(r,\theta))J(r,\theta)\,drd\theta,$$

con $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Con esto,

$$f(x(r,\theta),y(r,\theta)) = f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) = \sqrt{(r\cos\theta)^2 + (r\operatorname{sen}\theta)^2} = \sqrt{r^2} = |r| = r$$

y la integral se calcula como

$$\begin{aligned} \iint_D f(x,y)\,dxdy &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} rr\,d\theta dr = \int_0^2 r^2\theta|_0^{2\pi}\,dr \\ &= \int_0^2 2\pi r^2 = 2\pi\frac{r^3}{3}|_0^2 = \frac{8\pi}{3}. \end{aligned}$$

Se puede observar en el ejemplo 3.2.4 que el cálculo del Jacobiano es independiente de los límites de la nueva región D^*. Esto no sucede en todos los casos.

Ejercicio 3.2.5. Expresar a las siguientes dos regiones de $\mathbb{R}^2$ en coordenadas polares y hallar el Jacobiano del cambio de variables en ambos casos:

1. $D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \, (x-1)^2 + (y+3)^2 \leq 4\right\}$ (disco circular),
2. $D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \, 4x^2 + y^2 \leq 1\right\}$ (disco elíptico).

La resolución del ejercicio anterior motiva el siguiente teorema, cuya demostración queda para el lector.

Teorema 3.2.6. *Si* $D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \, \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} \leq 1)\right\}$ *con* $a,b\in\mathbb{R}_{>0}$*, las coordenadas polares son*

$$x = ar\cos\theta + x_0,$$

$$y = br\operatorname{sen}\theta + y_0,$$

con $0\leq r\leq 1$, $0\leq\theta\leq 2\pi$*. Además, el Jacobiano del cambio de variables a coordenadas polares* (r,θ) *es:*

$$J(r,\theta) = a\,b\,r.$$

Observación 3.2.7. Cualquier porción menor de disco circular o elíptico implicará una modificación en los límites de r y de θ pero las coordenadas polares serán iguales, lo cual implica que el Jacobiano tampoco se verá modificado.

Ejemplo 3.2.8. Calcular $\iint_D y - x\, dxdy$, siendo D la región definida por:

$$D = \begin{cases} 1 \leq y - x \leq 2 \\ 1 \leq y + x \leq 2. \end{cases}$$

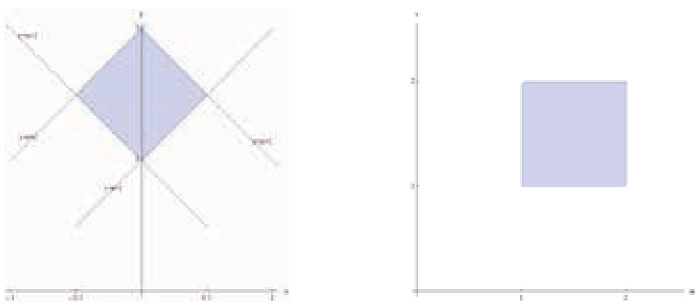
La región es la comprendida entre las rectas $y = x + 1$, $y = x + 2$, $y = 1 - x$ e $y = 2 - x$, es un paralelogramo inclinado (ver figura 3.2a). En este caso, conviene llamar

$$\begin{cases} u = y - x \\ v = y + x \end{cases} \Rightarrow D^* = \begin{cases} 1 \leq u \leq 2 \\ 1 \leq v \leq 2. \end{cases}$$

Figura 3.2: Paralelogramo y su transformación en el plano uv

(a) Paralelogramo inclinado

(b) Rectángulo D^* en el plano uv



La región D se transforma en un rectángulo cuadrado del plano uv (ver figura 3.2b).

$$\begin{cases} u & = y - x \Rightarrow y = u + x \\ v & = y + x \Rightarrow v = (u + x) + x \Rightarrow x = \frac{v-u}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{v-u}{2} \\ y = \frac{v+u}{2}. \end{cases}$$

Con esto se logró hallar $x(u, v)$ e $y(u, v)$ pero empezando justamente por el modo inverso, es decir, primero hallando $u(x, y)$ y $v(x, y)$. Este método es muy utilizado y sirve para muchos casos. Una vez obtenido el cambio de variables, resta calcular el Jacobiano:

$$J(u, v) = \left| det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \right| = \left| det \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right| = \left| -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right| = \left| -\frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}.$$

Si $f(x,y) = y - x \Rightarrow f(\frac{v-u}{2}, \frac{v+u}{2}) = \frac{v+u}{2} - \frac{v-u}{2} = \frac{2u}{2} = u$, entonces,

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x,y)\,dxdy &= \iint_{D^*} f\left(\frac{v-u}{2}, \frac{v+u}{2}\right) J(u,v)\,dudv \\
&= \int_1^2 \int_1^2 u\frac{1}{2}\,dudv = \int_1^2 \left.\frac{u^2}{4}\right|_{u=1}^{u=2} dv = \int_1^2 \frac{4-1}{4}\,dv \\
&= \int_1^2 \frac{3}{4}\,dv = \left.\frac{3}{4}v\right|_1^2 = \frac{3}{4}(2-1) = \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.2.9. Calcular $\iint_T \operatorname{sen}\left(\pi\frac{y-2x}{y+2x}\right) dxdy$, siendo T el triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,2)$ y $(0,4)$.

Este caso es algo diferente del anterior, ya que lo que motiva un cambio de variables no es la región T en sí, dado que es una región fácil de describir como de tipo I (ver figura 3.3a), sino la función a integrar. Por ello, se plantea el siguiente cambio de variables:

$$\begin{cases} u = y - 2x \Rightarrow u + 2x = y \Rightarrow u + \frac{v-u}{2} = y \Rightarrow y = \frac{v+u}{2} \\ v = y + 2x \Rightarrow v = u + 2x + 2x \Rightarrow x = \frac{v-u}{4}. \end{cases}$$

Como este cambio de variables es lineal, se espera que el triángulo T del plano xy sea transformado en otro triángulo T^* pero del plano uv. Esto también sugiere que los vértices de T sean llevados a vértices de T^*, de modo que:

- si $(x,y) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} u(0,0) = 0 - 0 = 0 \\ v(0,0) = 0 + 0 = 0 \end{cases} \Longrightarrow (u,v) = (0,0)$,
- si $(x,y) = (1,2) \Rightarrow \begin{cases} u(1,2) = 2 - 2 = 0 \\ v(1,2) = 2 + 2 = 4 \end{cases} \Longrightarrow (u,v) = (0,4)$,
- si $(x,y) = (0,4) \Rightarrow \begin{cases} u(0,4) = 4 - 0 = 4 \\ v(0,4) = 4 + 0 = 4 \end{cases} \Longrightarrow (u,v) = (4,4)$.

Es decir que el triángulo T se transformó en el triángulo T^* de vértices $(0,0)$, $(0,4)$ y $(4,4)$ en el plano uv (ver figura 3.3b). Esta región se puede expresar como de tipo II, teniendo en cuenta que las rectas que limitan a este triángulo son $u = 0$, $v = u$ y $v = 4$:

$$\begin{cases} 0 \leq v \leq 4 \\ 0 \leq u \leq v. \end{cases}$$

Resta calcular el Jacobiano de la transformación. Si $x = \frac{v-u}{4}$ e $y = \frac{v+u}{2}$, entonces:

$$J(u,v) = \left| det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \right| = \left| det \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right| = \left| -\frac{1}{8} - \frac{1}{8} \right| = \left| -\frac{1}{4} \right| = \frac{1}{4}$$

Entonces, la integral queda:

$$\iint_T \operatorname{sen}\left(\pi\frac{y-2x}{y+2x}\right) dxdy = \iint_{T^*} \operatorname{sen}\left(\pi\frac{u}{v}\right) J(u,v)\,dudv$$

$$= \int_0^4 \int_u^4 \operatorname{sen}\left(\pi \frac{u}{v}\right) \frac{1}{4}\, du dv = \int_1^4 \left[-\frac{\pi}{4v}\cos(\pi \frac{u}{v})\right]_{u=0}^{u=v} dv$$

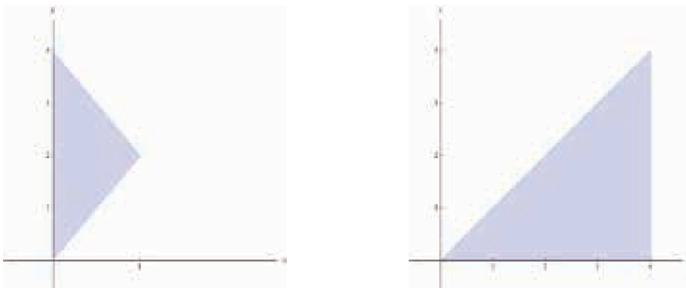
$$= \frac{1}{4}\int_1^4 \left[-\frac{v}{\pi}\cos(\pi \frac{u}{v})\right]_{u=0}^{u=v} dv = \frac{1}{4}\int_0^4 -\frac{v}{\pi}\underbrace{(\cos\pi - \cos 0)}_{=-2}\, dv$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^4 \frac{2v}{\pi}\, dv = \left.\frac{v^2}{4\pi}\right|_0^4 = \frac{4}{\pi}.$$

Figura 3.3: Triángulo y su transformación en el plano uv

(a) Triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,2)$ **y** $(0,4)$

(b) Triángulo de vértices $(1,1)$, $(0,1)$ **y** $(4,4)$ **en el plano** uv



Ejemplo 3.2.10. Calcular el área de la región en el primer cuadrante D, definida por:

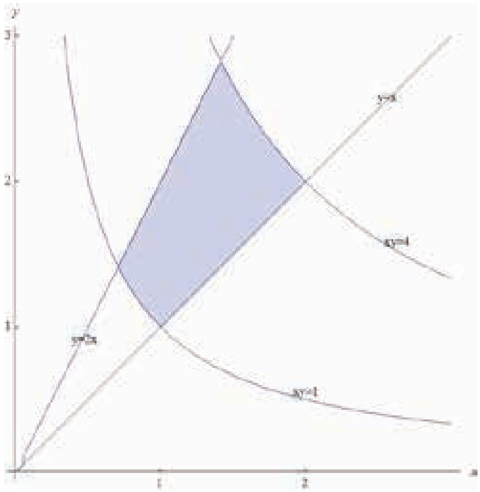
$$D = \begin{cases} yx & = 1 \\ yx & = 4 \\ y & = 2x \\ y & = x. \end{cases}$$

En este caso, se trata de la región encerrada entre dos hipérbolas ($yx = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x}$, $yx = 4 \Rightarrow y = \frac{4}{x}$), ambas con asíntotas $x = 0$ e $y = 0$ y las dos rectas $y = 2x$ e $y = x$. La condición sobre el primer cuadrante permite afirmar que se debe tomar solo una de las ramas de cada hipérbola, específicamente aquella en la que $x, y > 0$. La región D es la formada por la unión de todas las hipérbolas del primer cuadrante de la forma $yx = u$ con $1 \leq u \leq 4$, intersección todas las rectas de la forma $y = vx$ con $1 \leq v \leq 2$ (hipérbolas $xy = u$ intersección rectas de pendiente v que pasan por el origen). De acuerdo con lo recién descripto, se puede decir que

$$\begin{cases} u = yx \\ v = \frac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow D^* = \begin{cases} 1 \leq u \leq 4 \\ 1 \leq v \leq 2. \end{cases}$$

Y el gráfico de la región corresponde al de la figura 3.4.

Figura 3.4: Región en el 1º cuadrante encerrada entre las hipérbolas $yx = 1$, $yx = 4$ y las rectas $y = x$ e $y = 2x$



Si se tiene en cuenta que:

$$\begin{cases} u & = yx \Rightarrow y = \frac{u}{x} \\ v & = \frac{y}{x} \Rightarrow v = \dfrac{u/x}{x} = \dfrac{u}{x^2} \\ x & \geq 0, \end{cases}$$

El cambio de variables es:

$$\begin{cases} x & = \sqrt{\frac{u}{v}} \\ y & = \frac{v}{u}, \end{cases}$$

mientras que el Jacobiano será

$$J(u,v) = \left| det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \right| = \left| det \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2\sqrt{uv}} & -\dfrac{\sqrt{v}}{2u^{3/2}} \\ -\dfrac{\sqrt{u}}{2v^{3/2}} & \dfrac{1}{2\sqrt{uv}} \end{pmatrix} \right| = \left| -\frac{1}{4(\sqrt{uv})^2} - \frac{\sqrt{vu}}{4(uv)^{\frac{3}{2}}} \right|$$

$$= \left| -\frac{1}{4} \left[\frac{1}{uv} + \frac{1}{uv} \right] \right| = \left| -\frac{2}{4\,uv} \right| = \frac{1}{2uv}.$$

En este caso, el Jacobiano no es una constante y esto está relacionado con que la transfor-

mación fue hecha desde una región curvada a un rectángulo. Finalmente,

$$\begin{aligned}
\text{Área}(D) &= \iint_D 1\,dA = \int_1^2 \frac{1}{2uv}\,dvdu = \int_1^2 \frac{1}{2u} ln(v)\Big|_{v=1}^{v=2} du \\
&= \int_1^2 \frac{1}{2u}[ln(2) - \underbrace{ln(1)}_{=0}]\,du = \int_1^2 \frac{1}{2u} ln(2)\,du = \frac{ln(2)}{2} ln(u)\Big|_1^4 \\
&= \frac{ln(2)}{2}[ln(4) - ln(1)] = \frac{ln(2)ln(4)}{2}.
\end{aligned}$$

Es importante que este resultado haya dado positivo debido a que se estaba calculando el área de una región plana.

Lo que se puede extraer de estos ejemplos es la idea de que el cambio de variables resulta un método sumamente útil para calcular integrales en las que:

1) el dominio de integración no permita ser expresado como región de tipo I o II;

2) la función a integrar no parezca fácil de integrar aún cambiando el orden de integración;

3) aun cuando se pudieran hacer las dos cosas, las cuentas quedan muy difíciles de calcular.

3.2.1. Práctica

1) Sea P la región del plano x, y limitada por las rectas $x - y = 2, x - y = 5, 3x + y = 1$ y $3x + y = 3$.

a) Hallar variables u, v de modo que la región P del plano x, y se transforme en un rectángulo del plano u, v.

b) Calcular el área de P utilizando el teorema de cambio de variable.

2) Sean D la región limitada por las parábolas $y = x^2, y = 2x^2, y^2 = x, y^2 = 2x$ y $f(x, y) = x^{-3}$. Calcular $\iint_D f(x, y)\ dxdy$.

3) Graficar las siguientes regiones y describirlas en coordenadas polares.

a) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 5\}$

b) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$

c) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 6,\ y \leq x,\ x \leq -y\}$

d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + 1)^2 + (y - 3)^2 \leq 4\}$.

e) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leq 2\,;\ x, y \geq 0\}$

f) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ x + y \geq 1\}$

4) Calcular $\iint_D f(x,y)\ dxdy$ en los siguientes casos.

a) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$, $f(x,y) = (x^2+y^2)^{3/2}$.

b) D el dominio acotado por las recta $x + y = 1$, $x + y = 4$, $x - 2y = -1$, $x - 2y = 2$ y $f(x,y) = (x-2y)^2 e^{x-2y}$.

c) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ x + y \geq 1\}$ y $f(x,y) = \dfrac{1}{(x^2+y^2)^3}$.

3.3. Cambio de variables en $\mathbb{R}^3$

La idea del cambio de variables en 3 variables es la misma que en 2, por lo que solo se expondrá a continuación el teorema y luego se analizarán ciertos ejemplos importantes.

Teorema 3.3.1. *Sean W y W^* regiones elementales de $\mathbb{R}^3$ y sea $T : W^* \to W$ una función de clase C^1 e inyectiva (salvo, quizás sobre una superficie) tal que $W = T(W^*)$. Entonces, para cualquier $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ integrable*

$$\iint_W f(x,y)\, dxdy = \iint_{W^*} f(x(u,v,w), y(u,v,w)) J(u,v,w)\, dudvdw, \tag{3.3.1}$$

con $J(u,v,w)$, el Jacobiano del cambio de variables definido por

$$J(u,v,w) = \left| det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix} \right|. \tag{3.3.2}$$

Ejemplo 3.3.2. Coordenadas cilíndricas. Dado

$$W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\,,\ 0 \leq z \leq 2\right\},$$

decidir si es una región acotada. De ser así, calcular su volumen.

En primera instancia se puede observar que la región es un cilindro circular de radio 1 con eje de simetría $(0,0,z)$ (del estilo a los ya graficados en el capítulo 2) y es una región acotada, dado que $0 \leq z \leq 2$. Se sabe que

$$\text{Vol}(W) = \iiint_W 1\, dV,$$

pero calcular de modo directo esta integral triple puede ser algo engorroso. Se puede pensar lo siguiente: un cilindro macizo proyectado (es como "aplastado") en el plano xy es un disco, por lo cual las variables x e y pueden expresarse en coordenadas polares:

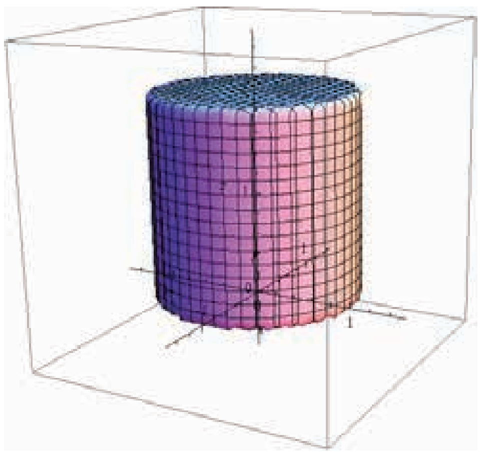
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta \end{cases}, \quad \begin{matrix} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{matrix}$$

Con esto se logra expresar un disco unitario en el plano $z = 0$. Si se quieren considerar todos los discos unitarios desde $0 \leq z \leq 2$, sería equivalente a expresar al cilindro en coordenadas polares. Como la variable z resulta independiente de x e y, queda determinada por sí misma. Se tiene entonces expresado al cilindro de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\operatorname{sen}\theta \\ z &= z \end{cases}, \quad \begin{matrix} 0 & \leq r \leq 1 \\ 0 & \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 & \leq z \leq 2. \end{matrix} \tag{3.3.3}$$

El cilindro queda así expresado en el espacio (r, θ, z) como un paralelepípedo (ver figura 3.6).

Figura 3.5: Cilindro $x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 2$

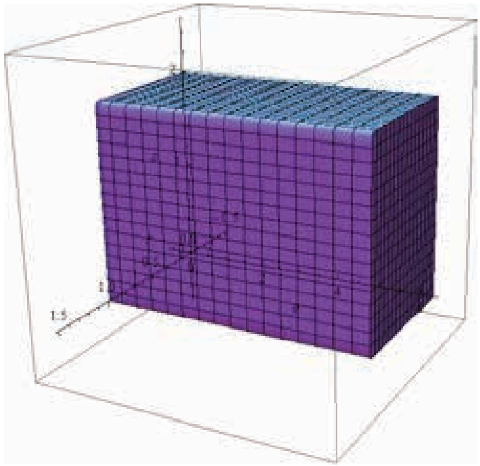


Esta forma de expresar una región del espacio en términos del radio, el ángulo y la altura es lo que se denomina *coordenadas cilíndricas*. Resulta sumamente útil para describir muchas regiones mixtas, como las del capítulo anterior y también para facilitar el cálculo de la integrales. Solo en el caso en que r, θ y z se muevan entre valores constantes se tratará de un cilindro con eje de simetría en z.

Para calcular el Vol(W) se puede hacer un cambio de variables a coordenadas cilíndricas, que queda expresado:

$$\text{Vol}(W) = \iiint_W 1\, dxdydz = \iiint_{W*} 1\, J(r, \theta, z)\, dzd\theta dr.$$

Figura 3.6: Región en la que se transforma el cilindro $x^2 + y^2 \leq 1\,,\, 0 \leq z \leq 2$



El Jacobiano $J(r, \theta, z)$ se debe calcular:

$$
\begin{aligned}
J(r,\theta,z) &= \left| det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} \right| = \left| det \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -r\operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| \\
&= \left| r\cos^2\theta + r\operatorname{sen}^2\theta \right| = \left| r\underbrace{(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)}_{=1} \right| = |r| \underbrace{=}_{r\geq 0} r.
\end{aligned}
\tag{3.3.4}
$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
\text{Vol}(W) &= \iiint_{W*} 1\, r\, dz d\theta dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^2 r\, dz d\theta dr \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r|_{z=0}^{z=2}\, d\theta dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 2r\, d\theta dr \\
&= \int_0^1 4\pi r\, dr = 2\pi r^2\big|_0^1 = 2\pi.
\end{aligned}
$$

Definición 3.3.3. *Las* ***coordenadas cilíndricas*** *son*

$$
\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\operatorname{sen}\theta \\ z &= z \end{cases}
\tag{3.3.5}
$$

y su Jacobiano es

$$J(r, \theta, z) = r. \tag{3.3.6}$$

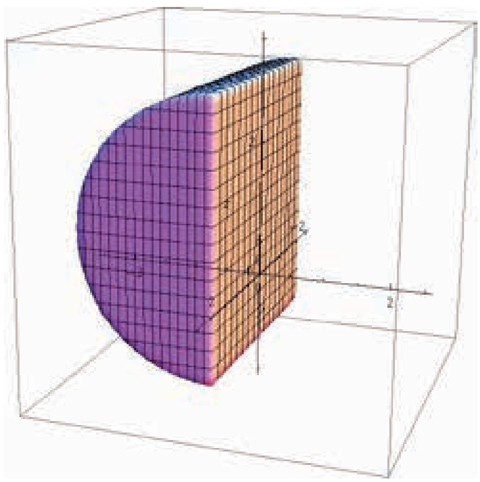
Por supuesto que, de acuerdo con cada región, podemos utilizar versiones de coordenadas cilíndricas modificadas de la anterior. Esto lo vemos en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 3.3.4. Expresar a W en coordenadas cilíndricas:

$$W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (z-1)^2 + y^2 \leq 4\,,\ -2 \leq x \leq 2,\ y \leq 0\right\}.$$

Por lo estudiado en el capítulo anterior, $(z-1)^2 + y^2 \leq 4\,,\ -2 \leq x \leq 2$ es un cilindro acotado de radio 2 con eje de simetría $(x, 0, 1)$, o sea, paralelo al eje x. La condición $y \leq 0$ impone que W es la mitad de ese cilindro tal que y sea menor o igual que 0 (ver figura 3.7).

Figura 3.7: Cilindro $(z-1)^2 + y^2 \leq 4\,,\ -2 \leq x \leq 2, y \leq 0$



Para este caso, el cambio de variables se hará sobre $z-1$ y sobre y, dejando a x que es la variable independiente:

$$\begin{cases} y &= r\cos\theta & & 0 \leq r \leq 2 \\ z-1 &= r\operatorname{sen}\theta \Rightarrow z = r\operatorname{sen}\theta + 1 & , & \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2} \\ x &= x & & -2 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Queda así porque si se considera la proyección de este medio cilindro sobre el plano yz se tiene el medio disco de radio 2 con centro en el origen con $y \leq 0$, de modo que el ángulo θ recorre medio arco, desde $\frac{\pi}{2}$ hasta $\frac{3\pi}{2}$. Esto también se puede deducir sin el gráfico: como $y \leq 0$ y además, por el cambio de variables, $y = r\cos\theta$ se tiene que $r\cos\theta \leq 0$. Teniendo además en cuenta que $r \geq 0 \Rightarrow r\cos\theta \leq 0$, se deduce que esto ocurre si y solo si $\cos\theta \leq 0$, con $0 \leq$

$\theta \leq 2\pi$. Queda que $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$ (en el plano yz el eje de las abscisas es el correspondiente a la variable y, más aún teniendo en cuenta de que se expresó a $y = r\cos\theta$, ya que el coseno siempre aparece por convención a la primera coordenada del punto del plano).

Aunque en este ejercicio no se pide el cálculo de ninguna integral, cabría preguntarse de qué forma sería el Jacobiano, en este caso:

$$\begin{aligned} J(r,\theta,z) &= \left| det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial x} \end{pmatrix} \right| = \left| det \begin{pmatrix} 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & -r\operatorname{sen}(\theta) & r\cos\theta \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| r\cos^2\theta + r\operatorname{sen}^2\theta \right| = \left| r \underbrace{(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)}_{=1} \right| \\ &= |r| \underbrace{=}_{r\geq 0} r. \end{aligned}$$

El Jacobiano no se vio modificado de la versión original, a pesar del cambio de eje de simetría y de que el cilindro estaba desplazado en 1 respecto de z.

Esto se puede generalizar, es decir, si se considera cualquier cilindro circular el Jacobiano será siempre igual a r. Esto no se cumple justamente si se considera un cilindro elíptico.

Ejemplo 3.3.5. Expresar W en coordenadas cilíndricas y calcular la integral $\iiint_W \frac{x^2}{4} + y^2 \, dxdydz$, si W está definido por

$$W = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1\,,\ -2 \leq z \leq 4 \right\}.$$

La región W es un cilindro elíptico con el eje z como eje de simetría, radio mayor 2 en la dirección x y radio menor 1 en la dirección y. Aquí no conviene plantear el cambio de variables a coordenadas cilíndricas que se vino haciendo, lo que conviene es plantear lo siguiente:

$$\begin{cases} \frac{x}{2} &= r\cos\theta \Rightarrow x = 2r\cos\theta \\ y &= r\operatorname{sen}\theta \\ z &= z \end{cases}, \quad \begin{matrix} 0 & \leq r \leq 1 \\ 0 & \leq \theta \leq 2\pi \\ -2 & \leq z \leq 4. \end{matrix}$$

La idea es aprovechar que $\frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{2^2} = (\frac{x}{2})^2$ y tomar como variable a reemplazar en principio no a x sino a $\frac{x}{2}$. El radio no es mayor a 1 porque el 2 que multiplica al cambio de variables de x se encarga de extender el radio máximo hasta 2.

Por otro lado, la función a integrar es $f(x,y,z) = \frac{x^2}{4} + y^2$, de modo que:

$$f(2r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z) = \frac{(2r\cos\theta)^2}{4} + (r\operatorname{sen}\theta)^2 = \frac{4r^2\cos^2\theta}{4} + r^2\operatorname{sen}^2\theta$$

$$= r^2(cos^2\theta + sen^2\theta) = r^2.$$

El Jacobiano se verá modificado:

$$\begin{aligned} J(r,\theta,z) &= \left| det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} \right| = \left| det \begin{pmatrix} 2\cos\theta & sen\theta & 0 \\ -2r\operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| 2r\cos^2\theta + 2r\operatorname{sen}^2\theta \right| = \left| 2r\underbrace{(cos^2\theta + sen^2\theta)}_{=1} \right| \\ &= |2r| \underbrace{=}_{2r\geq 0} 2r. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \iiint_W \frac{x^2}{4} + y^2\, dxdydz &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-2}^{4} r^2 2r\, dzd\theta dr \\ &= 2\int_0^1 \int_0^{2\pi} r^3(4-(-2))d\theta dr = 24\pi \int_0^1 r^3\, dr \\ &= 6\pi r^4\Big|_0^1 = 6\pi. \end{aligned}$$

De modo un poco más general, si se tiene un cilindro elíptico

$$W = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\, ,\ a,b > 0\, , c \leq z \leq d \right\},$$

el cambio de variables propuesto es

$$\begin{cases} \frac{x}{a} = r\cos\theta \Rightarrow x = ar\cos\theta & 0 \leq r \leq 1 \\ \frac{y}{b} = r\operatorname{sen}\theta \Rightarrow y = br\operatorname{sen}\theta \quad , & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ z = z & c \leq z \leq d, \end{cases} \tag{3.3.7}$$

y el Jacobiano será

$$\begin{aligned} J(r,\theta,z) &= \left| det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} \right| = \left| det \begin{pmatrix} a\cos\theta & b\operatorname{sen}\theta & 0 \\ -ar\operatorname{sen}\theta & br\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| abr\cos^2\theta + abr\operatorname{sen}^2\theta \right| = \left| a\,b\,r\underbrace{(cos^2\theta + sen^2\theta)}_{=1} \right| \\ &= |a\,b\,r| \underbrace{=}_{a\,b\,r\geq 0} abr \end{aligned}$$

$$J(r,\theta,z) = a\,b\,r. \tag{3.3.8}$$

Ejemplo 3.3.6. Expresar el cono $x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq 1$ en coordenadas cilíndricas.

Si se plantean las coordenadas cilíndricas,

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z &= z. \end{cases}$$

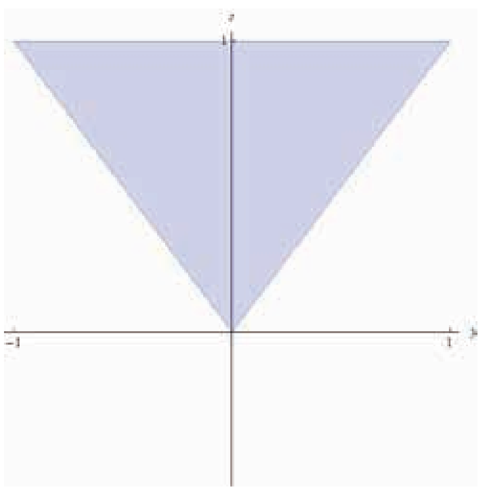
Restaría definir los límites de las variables r, θ y z. Para las dos primeras resulta muy útil ver la proyección del cono sobre el plano xy (recordar: proyectar es como “aplastar” conservando la forma). La misma es el disco unitario $x^2+y^2\leq 1$. De modo que se puede decir que el radio r y el ángulo θ que provienen del cambio de coordenadas del plano xy al $r\theta$ están limitados igual que para describir ese disco unitario, es decir,

$$\begin{aligned} 0 &\leq r \leq 1 \\ 0 &\leq \theta \leq 2\pi. \end{aligned}$$

Para ver los límites de z es útil proyectar el cono en el plano yz o xz (es lo mismo). Se puede ver que la región se ve como un triángulo invertido (ver figura 3.8). En el plano yz esa región triangular equivale a decir que z está limitado en la parte inferior por el borde del cono, mientras que en la superior lo hace el plano constante $z=1$. Esto se puede escribir de la siguiente manera:

$$\sqrt{x^2+y^2}\underbrace{\leq}_{1} z \underbrace{\leq}_{2} 1.$$

Figura 3.8: Proyección del cono $x^2+y^2\leq z^2$ en el plano yz



La desigualdad 1 quiere decir que la región está “por arriba” del cono, en tanto, la desigualdad 2 implica que que la región está “por debajo” del plano constante $z=1$. Si se considera

además el cambio de variables ya planteado para x e y se tiene que:

$$\sqrt{(r\cos\theta)^2 + (r\operatorname{sen}\theta)^2} = \sqrt{r^2} = r \leq z \leq 1.$$

Es decir, que z ya no varía entre dos constantes, o sea que la región de (r, θ, z) a la que se lleva la de (x, y, z) ya no será un paralelepípedo. Queda entonces,

$$\begin{array}{ll} 0 & \leq r \leq 1 \\ 0 & \leq \theta \leq 2\pi \\ r & \leq z \leq 1. \end{array}$$

Para realizar un trabajo análogo al expuesto en el ejemplo anterior, proponemos el siguiente ejercicio.

Ejercicio 3.3.7. Describir al paraboloide $x^2 + y^2 \leq z, 0 \leq z \leq 4$ en coordenadas cilíndricas

Ejemplo 3.3.8. Describir en coordenadas cilíndricas la siguiente región:

$$W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2 \leq 25 - x^2 - y^2, z \geq 0\right\}.$$

Las desigualdades $x^2 + y^2 \leq z^2$ y $z \geq 0$ describen a la parte positiva de un cono circular y su interior, en tanto $z^2 \leq 25 - x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \leq 25$ representa el interior de la media esfera de radio 5 y centro en el origen. La región W es entonces la intersección entre las dos regiones (interior del cono con esfera maciza), quedando una especie de cono con la "tapa" curvada (una versión de "cono de helado"), que se puede apreciar en la figura 3.9. Si se plantean las coordenadas cilíndricas

$$\left\{\begin{array}{ll} x & = r\cos\theta \\ y & = r\operatorname{sen}\theta \\ z & = z, \end{array}\right.$$

resta pensar los límites en los que se mueven r, θ y z. Del ejemplo anterior, se puede establecer que r y θ vayan entre dos constantes cada uno, dejando a z para que vaya entre dos funciones que dependen de las dos variables anteriores. Se sabe que $r \geq 0$, pero para determinar el límite superior de r hay que buscar la intersección entre las regiones frontera de estos sólidos (esfera y cono), como fue hecho en el capítulo anterior.

$$\left.\begin{array}{c} x^2 + y^2 = z^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 25 \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{x^2 + y^2}_{=z^2} + z^2 = 25 \Rightarrow z^2 + z^2 = 25$$

$$\Rightarrow 2z^2 = 25 \Rightarrow z^2 = \frac{25}{2} \Rightarrow z = \pm\frac{5}{\sqrt{2}}.$$

Luego, como $z \geq 0$ queda

$$\begin{array}{c} 0 \leq r \leq \frac{5}{\sqrt{2}} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{array}$$

Figura 3.9: Región $x^2+y^2 \leq z^2 \leq 25-x^2-y^2, z \geq 0$

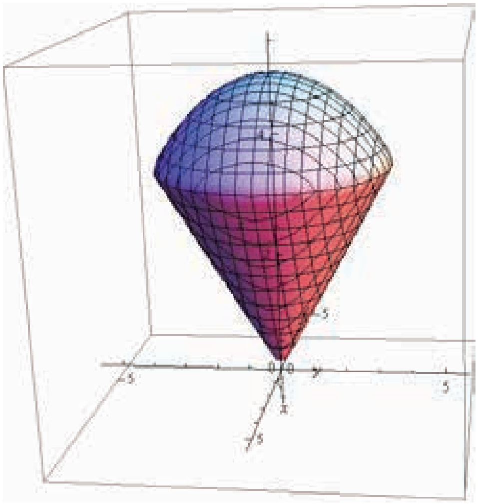
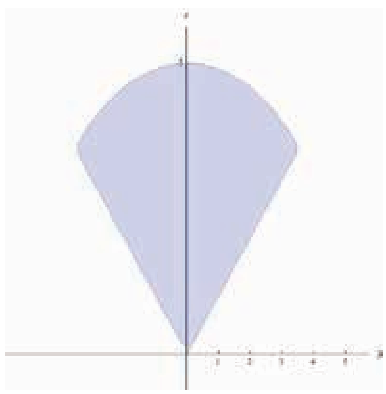


Figura 3.10: Proyección de la region $x^2+y^2 \leq z^2 \leq 25-x^2-y^2, z \geq 0$ en el plano yz



Se puede observar claramente, tanto en el gráfico como en las desigualdades que la región tiene como "piso" al cono y como "techo" al casquete esférico (ver figura 3.10). Dicho de otro modo, la variable z va desde el cono hasta la esfera,

$$\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{25-x^2-y^2} \quad \underbrace{\Rightarrow}_{x=r\cos\theta,\ y=r\,\mathrm{sen}\,\theta} \quad \sqrt{r^2} \leq z \leq \sqrt{25-r^2}.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} 0 &\leq r \leq \tfrac{5}{\sqrt{2}} \\ 0 &\leq \theta \leq 2\pi \\ r &\leq z \leq \sqrt{25 - r^2}. \end{aligned}$$

Las coordenadas cilíndricas resultan en muchos casos útiles y se puede expresar de esa manera gran parte de las regiones que hemos visto. Lo que sucede es que, muchas veces, este tipo de coordenadas no facilita las cuentas en el momento de integrar con un cambio de variables. El siguiente es un buen ejemplo de ello.

Ejemplo 3.3.9. Dada $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, calcular $\iiint_W f\, dV$, siendo W la esfera unitaria con centro en el origen.

Dicha región está determinada por la desigualdad $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, de modo que:

$$z^2 \leq 1 - x^2 - y^2 \Rightarrow \sqrt{z^2} \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2} \Rightarrow |z| \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

$$-\sqrt{1 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Y, viendo a z, entre dos funciones de x y de y (cada uno de los hemisferios), se puede plantear con coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r \operatorname{sen}\theta \\ z &= z \end{cases}$$

con

$$\begin{aligned} 0 &\leq r \leq 1 \\ 0 &\leq \theta \leq 2\pi \\ -\sqrt{1-r^2} &\leq z \leq \sqrt{1-r^2}. \end{aligned}$$

Para calcular la integral triple pedida, sabiendo que $f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z) = \frac{1}{r}$, se tiene:

$$\iiint_W f\, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} \frac{1}{r} r\, dz dr d\theta$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi}\int_0^1 z\Big|_{z=-\sqrt{1-r^2}}^{z=\sqrt{1-r^2}}\, dr d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1-r^2} - (-\sqrt{1-r^2})\, dr d\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 2\sqrt{1-r^2}\, dr d\theta.$$

De este modo queda una integral que no es fácil de calcular. Esto evidencia las limitaciones concretas de las coordenadas cilíndricas para regiones de este estilo. Justamente, lo que las hace poco prácticas es que no se ajustan bien a la región, ya que provienen de la interpretación de un cilindro, en el que el radio es una distancia que se mide desde un eje de simetría.

Si se piensa en otro tipo de coordenadas, teniendo en cuenta un radio ρ que se considere desde un único punto (el centro) y dos ángulos, uno en el plano xy (el famoso θ de antes) y otro en el plano yz (llamado ϕ), se puede armar el siguiente cambio de coordenadas:

$$\begin{cases} x &= \rho\cos\theta\,\mathrm{sen}(\phi) \\ y &= \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}(\phi) \\ z &= \rho\cos(\phi). \end{cases}$$

Se hacen algunas aclaraciones:

1. θ al igual que antes, mide la apertura desde el eje positivo de las x hasta el positivo de las y, por lo tanto su rango será $0 \leq \theta \leq 2\pi$ (ver figura 3.11a).
2. ϕ , en analogía con θ, mide la apertura desde el eje positivo de las z hasta el positivo de las y, pero su rango no será $0 \leq \phi \leq 2\pi$ pues el cambio de variables debe ser inyectivo, que no lo sería si se considera en ese rango a ϕ. Por lo tanto, $0 \leq \phi \leq \pi$ (ver figura 3.11b).
3. ρ mide la distancia desde cualquier punto al centro de la esfera, por lo tanto, $\rho \geq 0$ siempre. Además,

$$x^2+y^2+z^2 \leq 1 \Rightarrow (\rho\cos\theta\,\mathrm{sen}(\phi))^2 + (\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}(\phi))^2 + (\rho\cos(\phi))^2 \leq 1$$

$$\rho^2(\cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2(\phi) + \mathrm{sen}^2\theta\,\mathrm{sen}^2(\phi) + \cos^2(\phi)) \leq 1$$

$$\rho^2(\mathrm{sen}^2(\phi).(\underbrace{\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta}_{=1}) + \cos^2(\phi)) \leq 1$$

$$\rho^2\underbrace{(\mathrm{sen}^2(\phi) + \cos^2(\phi))}_{=1} \leq 1$$

$$\rho^2 \leq 1.$$

De modo que, pensando este cambio de variables, el mismo queda definido con:

$$\begin{gathered} 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \phi \leq \pi. \end{gathered}$$

Esto muestra que la región W^* de (ρ, θ, ϕ) es un paralelepípedo.

Para calcular la integral pedida, se puede observar que

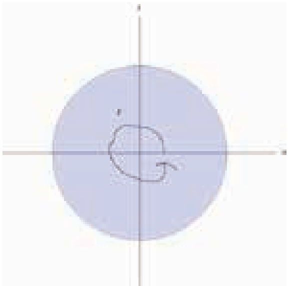
$$f(x,y,z) = f(\rho\cos\theta\,\mathrm{sen}(\phi), \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}(\phi), \rho\cos(\phi))$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{\rho\cos\theta\,\mathrm{sen}(\phi))^2 + (\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}(\phi))^2}}$$

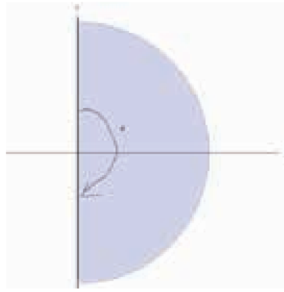
$$= \frac{1}{\sqrt{\rho^2 sen^2(\phi)}} = \frac{1}{|\rho\,\mathrm{sen}(\phi)|} \underbrace{=}_{0\leq\phi\leq\pi, 0\leq\rho} \frac{1}{\rho\,\mathrm{sen}(\phi)}$$

Figura 3.11: Rangos de medición de los ángulos θ y ϕ

(a) Rango de medición de θ



(b) Rango de medición de ϕ



y que

$$J(\rho,\theta,\phi)=\left|det\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \rho}\\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta}\\ \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \phi}\end{pmatrix}\right|$$

$$=\left|det\begin{pmatrix}\cos\theta\operatorname{sen}(\phi) & \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}(\phi) & \cos(\phi)\\ -\rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}(\phi) & \rho\cos\theta\operatorname{sen}(\phi) & 0\\ \rho\cos\theta\cos(\phi) & \rho\operatorname{sen}\theta\cos(\phi) & -\rho\operatorname{sen}(\phi)\end{pmatrix}\right|$$

$$=|-\cos(\phi)\rho^2(\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}(\phi)\cos(\phi)+\cos^2\theta\operatorname{sen}(\phi)cos(\phi))-\rho^2\operatorname{sen}(\phi)(\cos^2\theta\operatorname{sen}^2(\phi)$$
$$+sen^2\theta\operatorname{sen}^2(\phi))|$$

$$=\left|\rho^2[-\cos^2(\phi)\operatorname{sen}(\phi)-sen^3(\phi)]\right|$$
$$=\left|-\rho^2\operatorname{sen}(\phi)(\cos^2(\phi)+sen^2(\phi))\right|$$
$$=\left|-\rho^2\operatorname{sen}(\phi)\right|=\rho^2\operatorname{sen}(\phi).$$

Entonces,

$$\iiint_W f\,dV = \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{\rho\operatorname{sen}(\phi)}\rho^2\operatorname{sen}(\phi)\,d\phi d\theta d\rho=\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\rho\,d\phi d\theta d\rho$$
$$=\int_0^1 2\pi^2\rho\,d\rho=\pi^2\rho^2\big|_0^1=\pi^2.$$

El ejemplo 3.3.9 motiva la siguiente definición.

Definición 3.3.10. *Las **coordenadas esféricas** son*

$$\begin{cases} x &= \rho\cos\theta\operatorname{sen}(\phi)\\ y &= \rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}(\phi)\\ z &= \rho\cos(\phi)\end{cases}\qquad(3.3.9)$$

y su Jacobiano es

$$J(\rho,\theta,\phi)=\rho^2\operatorname{sen}(\phi). \tag{3.3.10}$$

Con este cambio de variables se resolvería el problema que había aparecido en el ejemplo 2.2.14. Queda para el lector la prueba de ello solicitada en el siguiente ejercicio.

Ejercicio 3.3.11. Probar que el volumen de la esfera unitaria con centro en el origen es $\frac{4\pi}{3}$ utilizando:

1. coordenadas cilíndricas,

2. coordenadas esféricas.

Ejemplo 3.3.12. Calcular el volumen de una esfera de radio a con centro en el origen:
Para esto conviene definir a la esfera como

$$W=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\leq a^2\right\}.$$

Se plantean coordenadas esféricas:

$$\begin{cases} x &= \rho\cos\theta\operatorname{sen}(\phi)\\ y &= \rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}(\phi)\\ z &= \rho\cos(\phi), \end{cases}$$

con

$$\begin{gathered} 0\leq\rho\leq a\\ 0\leq\theta\leq 2\pi\\ 0\leq\phi\leq\pi. \end{gathered}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \text{Vol}(W) &= \iiint_W 1\,dV=\int_0^a\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} 1.\rho^2\operatorname{sen}(\phi)\,d\phi d\theta d\rho\\ &= \int_0^a\int_0^{2\pi}\rho^2(-cos(\phi)|_0^{\pi})\,d\theta d\rho=\int_0^a\int_0^{2\pi}\rho^2 2\,d\theta d\rho\\ &= \int_0^a 4\pi\rho^2\,d\rho=\left.\frac{4\pi.r^3}{3}\right|_0^a=\frac{4\pi.a^3}{3}. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.3.13. Expresar W en coordenadas esféricas

$$W=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : b^2\leq x^2+y^2+z^2\leq a^2, z\geq 0, 0<b<a\right\}.$$

En este caso se trata de la mitad de un anillo centrado en el origen, por lo que puede quedar expresado en las mismas coordenadas esféricas de antes, con

$$\begin{gathered} b\leq\rho\leq a,\\ 0\leq\theta\leq 2\pi,\\ 0\leq\phi\leq\tfrac{\pi}{2}. \end{gathered}$$

Es importante notar que la restricción al hemisferio norte se la hace con la restricción en el rango de ϕ, ya que este mide cuánto se abre la región respecto del eje $z > 0$ hacia el eje $y > 0$. Esto se puede ver de modo más simple proyectando la región sobre el plano yz. Para que sea un anillo se considera una restricción sobre los límites que definen al radio ρ.

Ejemplo 3.3.14. Expresar a W en coordenadas esféricas

$$W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leq a^2\right\}.$$

En este caso general, de una esfera con centro (x_0, y_0, z_0) y radio $a > 0$, se pueden plantear coordenadas esféricas siguiendo la misma idea que para pensar en coordenadas cilíndricas con distintos ejes de simetría. La idea básica es, en lugar de realizar el cambio de variables en principio sobre x, y o z, hacerlo sobre $x - x_0$, $y - y_0$ y $z - z_0$:

$$\begin{cases} x - x_0 &= \rho \cos\theta . \operatorname{sen}(\phi) \Rightarrow x = \rho\cos\theta . \operatorname{sen}(\phi) + x_0 \\ y - y_0 &= \rho . \operatorname{sen}\theta . \operatorname{sen}(\phi) \Rightarrow y = \rho . \operatorname{sen}\theta . \operatorname{sen}(\phi) + y_0 \\ z - z_0 &= \rho\cos(\phi) \Rightarrow z = \rho\cos(\phi) + z_0 . \end{cases}$$

Una vez hecho el desplazamiento del centro, los límites de la región (ρ, θ, ϕ) son los mismos que los de una esfera de radio a con centro en el origen:

$$\begin{gathered} 0 \leq \rho \leq a, \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ 0 \leq \phi \leq \pi, \end{gathered}$$

Hay que observar que en ninguno de los casos anteriores se ve modificado el Jacobiano, dado que se trata del mismo cambio de variables, aun en el último ejemplo, puesto que el cambio de variables se ve afectado solo por la suma de constantes, entonces las derivadas parciales serán las mismas que antes (queda paraa el lector probarlo). Esto, sin embargo, no siempre sucede, como en el caso que sigue.

Ejemplo 3.3.15. Calcular el volumen de

$$W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} \leq 1\right\}.$$

Este elipsoide puede describirse en coordanadas esféricas si se realiza lo siguiente:

$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{a} &= \rho\cos\theta \operatorname{sen}(\phi) \Rightarrow x = a\rho\cos\theta\operatorname{sen}(\phi) + x_0 \\ \frac{y - y_0}{b} &= \rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}(\phi) \Rightarrow y = b\rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}(\phi) + y_0 \\ \frac{z - z_0}{c} &= \rho\cos(\phi) \Rightarrow z = c\rho\cos(\phi) + z_0 \end{cases}$$

con

$$\begin{gathered} 0 \leq \rho \leq 1, \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ 0 \leq \phi \leq \pi. \end{gathered}$$

Dado que un elipsoide puede interpretarse como una esfera “estirada.en alguna dirección. Con lo que hay que tener cuidado en el momento de considerar su Jacobiano. En efecto,

$$\begin{aligned} J(\rho,\theta,\phi) &= \left| det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| det \begin{pmatrix} a\cos\theta.\operatorname{sen}(\phi) & b\operatorname{sen}\theta.\operatorname{sen}(\phi) & c.\cos(\phi) \\ -a\rho\operatorname{sen}\theta.\operatorname{sen}(\phi) & b\rho\cos\theta.\operatorname{sen}(\phi) & 0 \\ a\rho\cos\theta.\cos(\phi) & b\rho\operatorname{sen}\theta.\cos(\phi) & -c.\rho\operatorname{sen}(\phi) \end{pmatrix} \right| \end{aligned}$$

Como en la primera columna está en cada lugar multiplicando a, así como en la segunda lo está b y en la tercera c, se puede utilizar la propiedad “$det(aC_1|bC_2|cC_3) = abc.det(C_1|C_2|C_3)$”, de modo que queda:

$$= \left| a\,b\,c det \begin{pmatrix} \cos\theta\operatorname{sen}(\phi) & \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}(\phi) & \cos(\phi) \\ -\rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}(\phi) & \rho\cos\theta\operatorname{sen}(\phi) & 0 \\ \rho\cos\theta\cos(\phi) & \rho\operatorname{sen}\theta\cos(\phi) & -\rho\operatorname{sen}(\phi) \end{pmatrix} \right|$$

$$= |abc| \underbrace{\left| det \begin{pmatrix} \cos\theta\operatorname{sen}(\phi) & \operatorname{sen}\theta.\operatorname{sen}(\phi) & \cos(\phi) \\ -\rho\operatorname{sen}\theta.\operatorname{sen}(\phi) & \rho\cos\theta.\operatorname{sen}(\phi) & 0 \\ \rho\cos\theta.\cos(\phi) & \rho\operatorname{sen}\theta.\cos(\phi) & -\rho\operatorname{sen}(\phi) \end{pmatrix} \right|}_{=\rho^2\operatorname{sen}(\phi)}$$

$$= abc\,\rho^2\ \operatorname{sen}(\phi).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \text{Vol}(W) &= \iiint_W 1\,dV = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} 1\,abc\rho^2.\operatorname{sen}(\phi)\,d\phi d\theta dr \\ &= abc \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^2(-\cos(\phi))|_0^{\pi}\,d\theta dr = a\,b\,c \int_0^1 4\pi.\rho^2\,dr \\ &= abc\frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

Observemos que el volumen del elipsoide es el volumen de la esfera unitaria multiplicado por $a\,b\,c$ que son los factores de estiramiento en las direcciones x, y y z.

A continuación expondremos ejemplos de integrales sobre regiones mixtas o más generales del espacio en los que se verá la gran utilidad del método de integración mediante el cambio de variables.

Ejemplo 3.3.16. Si W es el sólido descripto en el ejemplo 1.2.54, es decir

$$W = \left\{(x,y,z) :\ x^2+y^2+z^2 \le 1\,,\ x^2+y^2+z^2 \le 2y\right\},$$

calcular $\iiint_W\ x\,dV$.

En la figura 1.86 del capítulo 1 se encuentra graficada esta región, que resulta ser la intersección

entre dos esferas de radio 1 con distinto centro. La región en ese ejemplo se describió como:

$$W = \begin{cases} -\sqrt{\dfrac{3}{4}} & \leq x \leq \sqrt{\dfrac{3}{4}} \\ -\sqrt{\dfrac{3}{4} - x^2} & \leq z \leq \sqrt{\dfrac{3}{4} - x^2} \\ 1 - \sqrt{1 - x^2 - z^2} & \leq y \leq \sqrt{1 - x^2 - z^2}, \end{cases}$$

ya que la sombra en el plano xz correspondía a un disco de radio $\sqrt{\dfrac{3}{4}}$ con centro en el origen.

Si se quisiera pensar en un cambio de variables resulta que se tienen dos opciones: cilíndricas o esféricas. A pesar de tratarse de una región compuesta por esferas, el hecho de que estas tengan distintos centros hace que resulte difícil pensar en coordenadas esféricas, dado que no hay un punto fijo desde el cual tomar distancia y que esta se mueva entre dos constantes. Por lo tanto, se puede ver si se puede aplicar cambio de variables a coordenadas cilíndricas. Como la sombra se ha tomado en el plano xz tal vez convenga pensar en que el eje de simetría del cambio de variables sea z:

$$\begin{cases} x & = r\cos\theta \\ y & = y \\ z & = r \operatorname{sen}\theta. \end{cases}$$

Con esto, resta decir los límites inferiores y superiores de las nuevas variables (r, θ, y), para describir a W

$$\begin{cases} 0 & \leq r \leq \sqrt{\dfrac{3}{4}} \\ 0 & \leq \theta \leq 2\pi \\ 1 - \sqrt{1 - r^2} & \leq y \leq \sqrt{1 - r^2}, \end{cases}$$

para lo cual solo se reemplazó a (x, y, z) en la descripción original de W por el cambio de variables planteado. El Jacobiano sigue siendo $J(r, \theta, y) = r$, pues intercambiar columnas no cambia el determinante. Entonces, utilizando el teorema de cambio de variables:

$$\begin{aligned} \iiint_W x\, dV \underbrace{=}_{\text{TCV}} & \int_0^{\sqrt{\frac{3}{4}}} \int_0^{2\pi} \int_{1-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} r\cos\theta . r\, dy d\theta dr \\ = & \int_0^{\sqrt{\frac{3}{4}}} \int_0^{2\pi} r^2 . \cos\theta \left[\sqrt{1-r^2} - 1 + \sqrt{1-r^2}\right] d\theta dr \\ = & \int_0^{\sqrt{\frac{3}{4}}} \left[r^2 \left(2\sqrt{1-r^2} - 1\right) \operatorname{sen}\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} dr = 0. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.3.17. Calcular $\iiint_W f\, dxdydz$ si $f(x, y, z) = z$, y

$$W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2 \leq 4 - x^2 - y^2, z \geq 0\right\}.$$

Por lo hecho en el ejemplo 1.2.55, la región es una especie de cono de helado (ver su gráfico en la figura 1.89), y se describe como

$$W = \begin{cases} -\sqrt{2} & \leq x \leq \sqrt{2} \\ -\sqrt{2-x^2} & \leq y \leq \sqrt{2-x^2} \\ \sqrt{x^2+y^2} & \leq z\sqrt{4-x^2-y^2}. \end{cases}$$

Su sombra en el plano xy es un disco de radio $\sqrt{2}$ con centro en el origen. Además el vértice del cono coincide con el centro de la esfera. Se puede entonces plantear un cambio de variables a coordenadas esféricas con centro en el origen:

$$\begin{cases} x & = \rho\cos\theta\operatorname{sen}\phi \\ y & = \rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi \\ z & = \rho\cos\phi, \end{cases}$$

con

$$\begin{cases} 0 \leq \rho \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

ya que lo último describiría bien la sombra en polares. Para ver los límites de ϕ hay que tener en cuenta que, desde el eje positivo de las z hay región hasta el ángulo $\pi/4$ dado que es el ángulo determinado por la función módulo. Analíticamente, se ve porque si fijamos $\theta = \pi/2$:

$$z = |y| = y \Leftrightarrow \rho\cos\phi = \rho\operatorname{sen}(\pi/2)\operatorname{sen}\phi \Leftrightarrow \cos\phi = \operatorname{sen}\phi \Leftrightarrow \phi = \frac{\pi}{4}.$$

Entonces

$$\iiint_W f\,dV \underbrace{=}_{\text{TCV}} \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho\cos\phi \underbrace{\rho^2\operatorname{sen}\phi}_{=J(\rho,\theta,\phi)} \,d\phi d\theta d\rho$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \left[\rho\frac{\operatorname{sen}^2\phi}{2}\right]_{\phi=0}^{\phi=\frac{\pi}{4}} d\theta d\rho = \int_0^2 \frac{2\pi\rho}{4} d\rho = \left[\frac{\pi\rho^2}{4}\right]_0^2 = \pi.$$

Ejemplo 3.3.18. Calcular $\iiint_W \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdydz$ si

$$W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq x^2+y^2\right\}.$$

Esta región corresponde a la del ejemplo 1.2.56, cuyo gráfico es el de la figura 1.91. Se trata de la región encerrada entre el cono y el paraboloide con $0 \leq z \leq 1$. Una forma de calcular esa integral es plantear un cambio de variables a coordenadas cilíndricas, porque el paraboloide no suele describirse de modo simple por esféricas (queda para el lector pensar por qué ocurre esto). Como la región tiene como eje de simetría al eje z, entonces queda descripta

$$\begin{cases} x & = r\,\cos\theta \\ y & = r\,\operatorname{sen}\theta \\ z & = z, \end{cases}$$

con

$$\begin{cases} 0 & \leq r \leq 1 \\ 0 & \leq \theta \leq 2\pi \\ \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{=r} & \leq z \leq \underbrace{x^2+y^2}_{=r^2}. \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \iiint_W \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdydz \quad & \underbrace{=}_{\text{TCV}} \quad \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_r^{r^2} \frac{1}{r}.r\, dzd\theta dr \\ & = \quad \int_0^1 2\pi(r^2-r)\, dr = 2\pi\left[\frac{r^3}{3}-\frac{r^2}{2}\right]_0^1 = -\frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.3.19. Calcular el volumen del siguiente sólido

$$W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \leq z\,,\ 1 \leq z \leq 3\right\}.$$

La desigualdad $\sqrt{x^2+y^2} \leq z$ corresponde a lo que está por arriba del cono circular clásico con eje de simetría en z y vértice en el origen. Como $1 \leq z \leq 3$, la figura corresponde a la de un cono truncado (ver figura 3.12). Hay dos formas de resolverlo, con distinta filosofía:

1. Por medio de cambio de variables: si se piensa en las coordenadas cilíndricas,

$$\begin{cases} x & = r\,\cos\theta \\ y & = r\,\operatorname{sen}\theta \\ z & = z, \end{cases}$$

hay que tener mucho cuidado en la descripción de los límites de los parámetros y de cuál va en función de cuál. La forma más natural, que es que z dependa de r y de θ, en este caso no sirve, puesto que hay que separar en varias regiones para conseguir el límite inferior. Esto se debe a que si se mira la sombra de la región en el plano yz, se tiene que el piso es el cono y el plano $z = 1$. De modo que hay que pensar a r en función de las otras variables. En ese caso, puede entenderse que, para cada z fijo, existe un radio r determinado por ese z. Entonces

$$\begin{cases} 1 \leq z \leq 3 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq z. \end{cases}$$

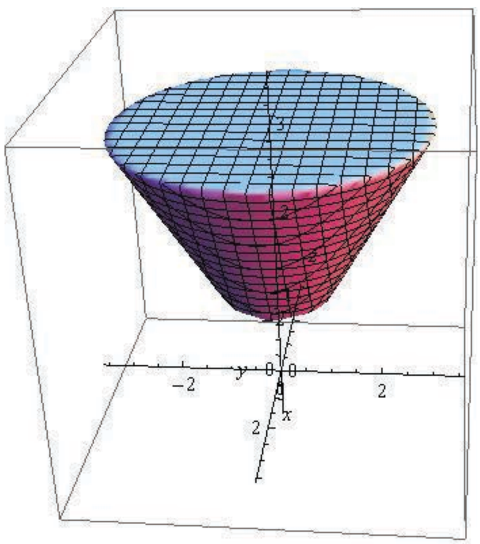
La última desigualdad sale del hecho de que $r = \sqrt{x^2+y^2} \leq z$, evaluando en el cambio de variables. Con esto, el volumen se calcula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(W) \quad & = \quad \iiint_W 1\, dxdydz \underbrace{=}_{\text{TCV}} \int_1^3 \int_0^{2\pi} \int_0^z r\, drd\theta dz \\ & = \quad \int_1^3 2\pi\frac{z^2}{2}\, dz = 2\pi\left[\frac{r^3}{3}\right]_1^3 = \frac{26}{3}. \end{aligned}$$

y en este caso hay que corroborar que el resultado sea positivo, dado que se está calculando un volumen.

2. La forma anterior parece simple, pero en el planteo está su dificultad, dado que en general se piensa z función de las otras variables y no al revés. Otra manera de encarar este ejemplo es pensando en la aditividad del volumen. Si se considera el cono W_1, dado por $\sqrt{x^2+y^2} \leq z$, con $0 \leq z \leq 3$, se puede advertir que el cono truncado es una parte de él. Si se considera el cono más pequeño W_2, dado por $\sqrt{x^2+y^2} \leq z$, con $0 \leq z \leq 1$, tenemos que:
$$\text{Vol}(W_1) = \text{Vol}(W) + \text{Vol}(W_2),$$
entonces
$$\text{Vol}(W) = \text{Vol}(W_1) - \text{Vol}(W_2).$$
¿Cuál es la facilidad de plantear esto? Reside en que calcular $\text{Vol}(W_1)$ o $\text{Vol}(W_2)$ es mucho más fácil, dado que son conos no truncados y se puede hacer con coordenadas cilíndricas. La resta de esos dos volúmenes (el del más grande menos el del más pequeño) debería dar $\frac{26}{3}$.

Figura 3.12: Cono truncado descripto por $\sqrt{x^2+y^2} \leq z$, $1 \leq z \leq 3$



Ejemplo 3.3.20. Calcular el volumen de la región W, descripta como
$$W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \, x^2+y^2+z^2 \leq 4\, ,\, 1 \geq x\right\}.$$

Esta región corresponde a una porción de esfera truncada por un plano que no pasa por su centro (ver figura 3.13). A pesar de que es una esfera, lo anterior sugiere que tal vez no sea conveniente describirla mediante coordenadas esféricas, por lo cual se puede plantear lo siguiente:

$$\begin{cases} y &= r\cos\theta \\ z &= r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ x &= x. \end{cases}$$

Esto es porque el eje x es el eje de simetría de esta región. Además, si $x = 1$ tenemos que $1^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \Rightarrow y^2 + z^2 \leq 3$, lo cual dice que la sombra en el plano yz es un disco de centro $(0,0)$ y radio $\sqrt{3}$. Con esto, queda que

$$\begin{cases} 0 &\leq r \leq \sqrt{3} \\ 0 &\leq \theta \leq 2\pi \\ 1 &\leq x \leq \underbrace{\sqrt{4 - x^2 + y^2}}_{=\sqrt{4-r^2}}. \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(W) &= \iiint_W 1\, dxdydz \underbrace{=}_{\mathrm{TCV}} \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{4-r^2}} r\, dxd\theta dr \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} r\sqrt{4-r^2} - r = 2\pi \left[-\frac{1}{3}\left(4 - r^2\right)^{3/2} - \frac{r^2}{2} \right]_0^{\sqrt{3}} \\ &= 2\pi \left[-\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + \frac{8}{3} \right] = \frac{5}{3}\pi. \end{aligned}$$

3.3.1. Práctica

1) Graficar y describir en coordenadas cilíndricas o esféricas, según sea conveniente.

a) $D = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 \leq 4,\ -1 \leq z \leq 4,\ y \geq 0\}$

b) $D = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 \leq z,\ 0 \leq z \leq 4\}$

c) $D = \{(x,y,z) : x^2 + z^2 \leq y^2,\ 0 \leq y \leq 5\}$

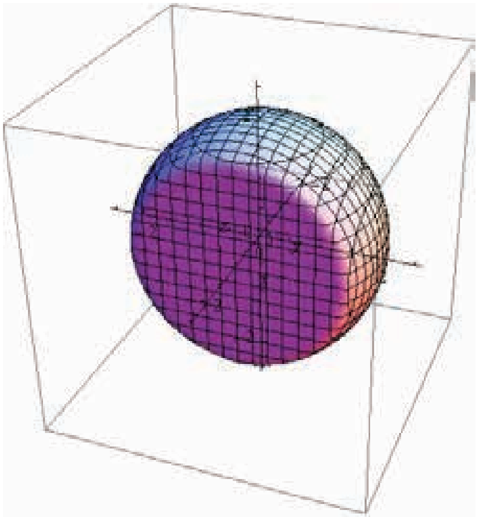
d) $D = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 7,\ x,y,z \geq 0\}$

e) $D = \{(x,y,z) : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 10\}$

2) Calcular el volumen de cada uno de los siguientes sólidos.

a) Sólido limitado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ y contenido en el **exterior** del cono $z^2 = x^2 + y^2$.

Figura 3.13: $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\,,\, 1 \geq x\}$



b) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 3, z \geq 2\}$.

c) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \leq z^2 + y^2, 4 \geq x \geq 0\}$.

d) Sólido limitado por las superficies $x = \sqrt{y^2 + z^2}$ y $x = y^2 + z^2$.

e) Sólido definido por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 25$ y $x^2 + y^2 \geq 9$.

3) Calcular las siguientes integrales triples.

a) $\iiint_A ye^{x^2+z^2}\ dxdydz$ donde

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 4,\ 1 \leq y \leq 5\}.$$

b) $\iiint_A x^2 + y^2 + z^2\ dxdydz$, donde

$$A = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 3,\ -1 \leq z \leq 3\}.$$

c) $\iiint_A \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\ dxdydz$, donde $A = \{(x, y, z) : a \leq \|(x, y, z)\| \leq b\}$.

Parte II

Curvas y superficies

Capítulo 4

Integrales sobre curvas

4.1. Curvas parametrizables

En este capítulo y en los siguientes trabajaremos con trayectorias o curvas, pero primero vamos a definirlas, aunque sea de un modo elemental pero lógico. Una curva es una línea (no necesariamente recta) del plano o del espacio. Si toda la curva encuentra en un mismo plano, se dice que la curva es plana, por ejemplo, la curva $(x, x^2, 0)$ cuya imagen es una parábola se encuentra en el plano $z = 0$.

En este libro trabajaremos con curvas paramétricas o curvas parametrizadas.

Definición 4.1.1. *Una **curva parametrizada** C del plano es un conjunto de $\mathbb{R}^2$ que se puede representar mediante una función derivable a trozos $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, tal que $Im(\sigma) = C$*

Para curvas del espacio se puede hacer una definición análoga.

Ejemplo 4.1.2. La curva plana $y = x^2 + 1$ es una curva parametrizable, puesto que si se toma a y como dependiente de x, puede ser descripta por los siguientes puntos $(x, x^2 + 1)$ con $x \in \mathbb{R}$. Se puede definir entonces una parametrización $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ para esta curva, dada por $\sigma(t) = (t, t^2 + 1)$. La curva en cuestión es una parábola y es una curva paramétrica, su gráfico es el de la figura 4.1.

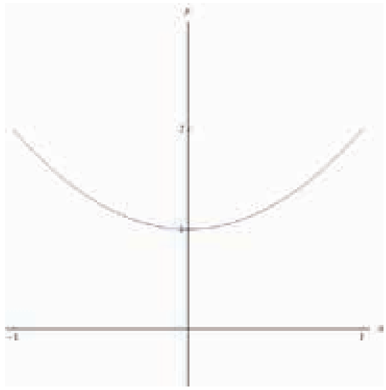
Ejemplo 4.1.3. Decidir si el segmento de la recta $y = x - 3$, $-1 \leq x \leq 1$ es parametrizable exhibiendo una parametrización. Decidir si existe otra parametrización distinta de la hallada del mismo segmento.

Es el segmento de dicha recta que va entre los puntos $(-1, -4)$ y $(1, -2)$, esto sale de reemplazar x por -1 y 1 en cada caso. Pensando en el ejemplo anterior, se puede plantear que $x = t$ y $\sigma(t) = (t, t - 3)$, pero en este caso $\sigma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$, dado que $-1 \leq x = t \leq 1$, por lo tanto, la curva es parametrizable.

Además se puede ver que:

1) $t = -1 \Rightarrow \sigma(-1) = (-1, -4)$, que puede interpretarse como que a “tiempo” inicial se está en $(-1, -4)$.

Figura 4.1: Curva plana $y = x^2 + 1$



2) $t = 1 \Rightarrow \sigma(1) = (1, -2)$, que puede interpretarse como que a "tiempo" final se está en $(1, 2)$.

3) Si se considera el vector velocidad de la curva, dado por $\sigma'(t) = (1, 1)\ \forall t \in [-1, 1]$, se tiene que apunta en la dirección desde $(-1, -4)$ hasta $(1, -2)$, además $\sigma'(t) = (1, 1) \neq (0, 0)$, lo cual implica que la velocidad nunca se anula y, por lo tanto, no se detiene en el recorrido de la curva.

Estas tres observaciones permiten afirmar que la parametrización exhibida recorre la curva regularmente (sin detenerse ni retroceder) desde $(-1, -4)$ hasta $(1, -2)$.

Este recorrido no siempre es igual, dado que, por ejemplo, si se considera el hecho de que la recta $y = x - 3$ tiene dirección $(1, 1)$, entonces se puede pensar en infinitas representaciones paramétricas con vectores directores múltiplos de $(1, 1)$. Más aún, se puede pensar en un múltiplo del vector director y considerar sumarle otro punto de la recta distinto de $(0, -3)$, quedando por ejemplo $\sigma_1 = (-t + 3, -t)$ (en este caso incluso se puede pensar en tomar como $y = t$) con $2 \leq t \leq 4$, ya que

1) $t = 2 \Rightarrow \sigma_1(2) = (1, -2)$, que puede interpretarse como que a "tiempo" inicial se está en $(1, -2)$.

2) $t = 4 \Rightarrow \sigma_1(4) = (-1, -4)$, que puede interpretarse como que a "tiempo" final se está en $(-1, -4)$.

3) Si se considera el vector velocidad de la curva, dado por $\sigma_1'(t) = (-1, -1)\ \forall t \in [2, 4]$, se tiene que apunta en la dirección desde $(1, -2)$ hasta $(-1, -4)$, además $\sigma_1'(t) = (1, 1) \neq (0, 0)$, lo cual implica que la velocidad nunca se anula y por lo tanto no se detiene en el recorrido de la curva.

Figura 4.2: Sentido del recorrido de σ por la curva plana $y = x - 3$, $-1 \leq x \leq 1$



Lo anterior permite decir que la parametrización σ_1 recorre a la curva desde $(1, -2)$ hasta $(-1, -4)$, justo de forma contraria a como lo hace σ. Se dice que estas parametrizaciones tienen orientaciones opuestas.

Figura 4.3: Sentido del recorrido de σ_1 por la curva plana $y = x - 3$, $-1 \leq x \leq 1$



Al sentido en el que una parametrización recorre una curva se lo llama *orientación*.

En el ejemplo anterior, para afirmar cómo estaba recorriendo a la curva una parametrización, resultó crucial el hecho de que la derivada de la parametrización no fuera nula, dado que

esto afirmaba que no había detenciones o retrocesos. Esta propiedad de la parametrización se denomina *regularidad* y a continuación la definimos de modo más general.

Definición 4.1.4. *Una función* $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$*,* $n \in \mathbb{N}$*, se dice* ***regular*** *si* $\alpha'(t) \neq (0, 0)\, \forall t \in [a, b]$.

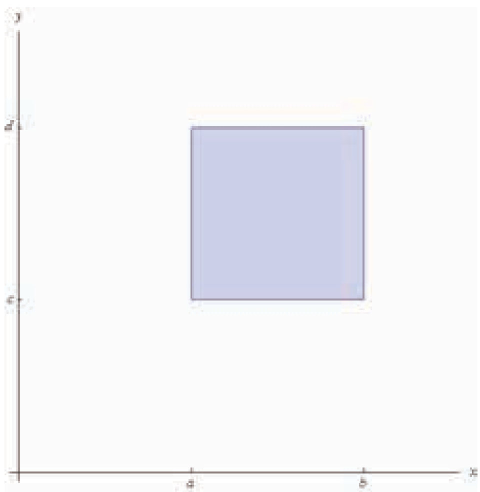
A continuación se exponen dos casos especiales.

Ejemplo 4.1.5. La parametrización de la curva $y = x^2$, dada por $\alpha(t) = (t^2, t^4)$ no es regular en $t = 0$, dado que:

$$\alpha'(t) = (2t, 4t^3) \Rightarrow \alpha'(0) = (0, 0).$$

Ejemplo 4.1.6. La curva C dada por el borde del rectángulo $[a, b] \times [c, d]$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b, c < d$ es una curva que tiene cuatro vértices, es decir, es una curva partida. Si bien, se sabe que los picos o vértices traen muchas veces problemas de derivabilidad y de regularidad, en este caso no trae mayores inconvenientes. Esto es porque C es una curva que resulta de la unión de segmentos de las rectas $x = a$, $x = b$, $y = c$ e $y = d$, que son, cada una de ellas curvas regulares (puesto que poseen parametrizaciones regulares, como las vistas en ejemplos anteriores). En este caso, se dice que C es regular a trozos.

Figura 4.4: Curva dada por el borde del rectángulo $[a, b] \times [c, d]$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b, c < d$



El ejemplo anterior motiva la siguiente definición.

Definición 4.1.7. *Una parametrización o curva* $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ *que es unión de parametrizaciones regulares se dice* ***regular a trozos****.*

Figura 4.5: Curva regular a trozos



Otra definición interesante es la siguiente.

Definición 4.1.8. *Una curva C parametrizada se dice* ***simple*** *si, dada $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, una parametrización de C, se tiene que*

$$\sigma(x) \neq \sigma(x') \, \forall x, x' \in (a, b).$$

Esto afirma que una curva simple es inyectiva e incluye al caso en el que $\sigma(a) = \sigma(b)$, es decir que sea inyectiva salvo, a lo sumo, en el borde. Es una curva que no se cruza a sí misma.

Figura 4.6: Curva simple

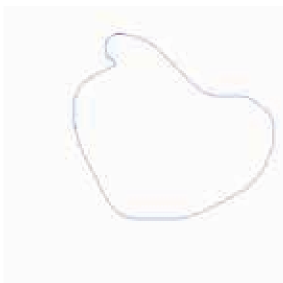
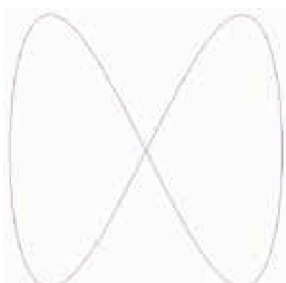


Figura 4.7: Curva no simple



Otra definición que será de mucha utilidad para nombrar a ciertas curvas es la siguiente.

Definición 4.1.9. *Una curva C parametrizada se dice* ***cerrada*** *si, dada $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, una parametrización de C, se tiene que $\sigma(a) = \sigma(b)$.*

Figura 4.8: Curva cerrada

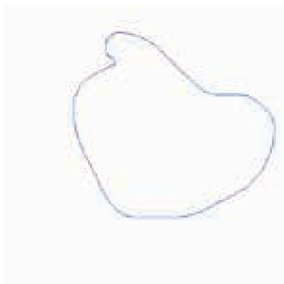


Figura 4.9: Curva no cerrada



Algo fundamental es asumir que, dada una curva, existen infinitas parametrizaciones (no necesariamente regulares). No obstante, solo existen dos orientaciones posibles. Cabe preguntarse si, dada una curva, existe alguna manera de hallar dos parametrizaciones que la orienten de manera distinta. Se puede analizar el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.1.10. Dada la curva C, intersección del cilindro $z = sen(x)$, $0 \leq x \leq \pi$ con el plano $x + y + z = 1$. Hallar dos parametrizaciones que la orienten de manera distinta.

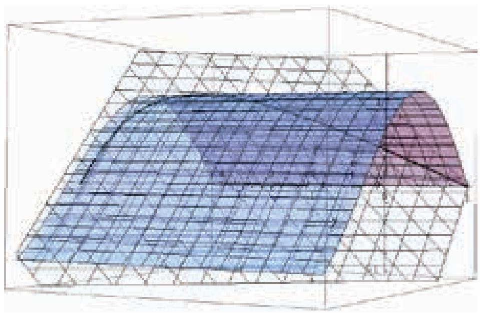
La curva en cuestión es la unión de aquellos puntos del espacio que verifican:

1) $(x, y, z) = (x, y, sen(x))$,

2) $(x, y, z) = (x, 1 - x - z, z)$,

entonces, $y = 1 - x - z$, $z = sen(x) \Rightarrow (x, 1 - x - sen(x), sen(x))$.

Figura 4.10: Curva intersección del cilindro $z = sen(x)$ y el plano $x + y + z = 1$, $0 \leq x \leq \pi$



a) Si $x = 0 \Rightarrow (0, 1 - 0 - sen0, sen0) = (0, 1, 0)$.

b) Si $x = \pi \Rightarrow (\pi, 1 - \pi - sen\pi, sen\pi) = (\pi, 1 - \pi, 0)$.

Si $x = t$ queda definida una parametrización de C $\sigma(t) = (t, 1 - t - sent, sent)$ con $0 \leq t \leq \pi$, tal que

a) Si $t = 0 \Rightarrow (0, 1 - 0 - sen\,0, sen\,0) = (0, 1, 0)$.

b) Si $t = \pi \Rightarrow (\pi, 1 - \pi - sen\pi, sen\pi) = (\pi, 1 - \pi, 0)$.

c) $\sigma'(t) = (\underbrace{1}_{\neq 0}, -1 - \cos t, \cos t) \neq (0, 0, 0)$.

Esto dice que se trata de una parametrización regular que recorre a C desde $(0, 1, 0)$ hasta $(\pi, 1 - \pi, 0)$.

Para hallar una parametrización regular que recorra en sentido contrario a C se puede pensar lo siguiente: se quiere pensar en una parametrización $\sigma_{op} : [c, d] \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$\begin{cases} \sigma_{op}(c) & = (\pi, 1 - \pi, 0) \\ \sigma_{op}(d) & = (0, 0, 0). \end{cases}$$

Si se considera a $\sigma_{op}(t) = \sigma(\pi - 0 - t) = (\pi - t, 1 - (\pi - t) - sen(\pi - t), sen(\pi - t))$ se tiene que:

$$\begin{cases} \sigma_{op}(0) & = \sigma(\pi - 0) = \sigma\pi = (\pi, 1 - \pi, 0) \\ \sigma_{op}(\pi) & = \sigma(\pi - \pi) = \sigma(0) = (0, 0, 0) \\ \sigma'_{op}(t) & = (-1, 1 + \cos(\pi - t), -\cos(\pi - t)) \neq (0, 0, 0) \end{cases}$$

De este modo, se halló una parametrización $\sigma_{opuesta}$ regular que recorre en sentido inverso a C, es decir, que invierte la orientación dada por σ.

Este método sencillo para hallar, dada una parametrización, otra que invierta la orientación de la primera puede generalizarse de la siguiente manera.

Observación 4.1.11. Dada una parametrización regular de una curva C, dada por $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, otra parametrización de C es

$$\sigma_{op}(t) = \sigma(a + b - t).$$

Esta σ_{op} es una parametrización que invierte la orientación de σ y además es regular, dado que σ lo era.

Esta característica de conservar la regularidad se relaciona con que $\sigma_{opuesta}$ no es más que tomar a la parametrización original σ y componerla con una función lineal $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$, $\alpha(t) = b + a - t$. Entonces,

$$\sigma'_{op}(t) = (\sigma o \alpha)'(t) \underbrace{=}_{por\ regla\ de\ la\ cadena} \sigma'(\alpha(t))\alpha'(t).$$

$\sigma'(\alpha(t)) \neq \overline{0}$ y $\alpha'(t) = -1 \neq 0\, \forall t \in \mathbb{R}$, por lo tanto,

$$\sigma'_{op}(t) = (\sigma o \alpha)'(t) = \sigma'(\alpha(t))\alpha'(t) \neq \overline{0}.$$

No es la única forma de conseguir una parametrización que invierta la orientación. De aquí en adelante, se trabajará casi siempre con parametrizaciones regulares.

Ejemplo 4.1.12. Hallar una parametrización para cada una de las siguientes curvas.

1) $C \subseteq \mathbb{R}^2$ dada por $x^2 + y^2 = 4$,

2) $C \subseteq \mathbb{R}^3$ dada por $4x^2 + (y - 1)^2 = 4, z = 1$.

1) En el primer caso C se trata de una circunferencia en el plano real con centro en el $(0, 0)$ y de radio 2. Sabiendo que $cos^2 t + sen^2 t = 1$, si se multiplica esta igualdad a ambos lados por 4 se tiene:

$$4\cos^2 t + 4\operatorname{sen}^2 t = 4 \Rightarrow (2\cos t)^2 + (2\operatorname{sen} t)^2 = 2^2$$

$$(x, y) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t) = \sigma(t).$$

Lo que falta ver es el rango en el que se mueve t, ya que si $t \in \mathbb{R}$ resulta entonces que se recorre a la circunferencia pero σ no resulta una parametrización inyectiva. Entonces $0 \leq t \leq 2\pi$. Algo para tener en cuenta es el hecho de que $\sigma'(t) = (-2\operatorname{sen} t, 2\cos t)$, de modo que:

$$\begin{cases} \sigma'(0) & = \sigma'(\pi) = (0, 2) \\ \sigma'(\frac{\pi}{2}) & = (-2, 0) \\ \sigma'(\frac{3\pi}{2}) & = (2, 0). \end{cases}$$

Esto posiciona a los vectores velocidad en los puntos $(2, 0)$, $(0, 2)$ $(-2, 0)$ y $(0, -2)$ indicando que la curva es recorrida en ese orden (ver figura 4.11).

2) $C \subseteq \mathbb{R}^3$ dada por $4x^2 + (y-1)^2 = 4$, $z = 1$ es una elipse, ya que si se divide a la expresión por 4 queda

$$x^2 + \frac{(y-1)^2}{4} = 1\,,\; z = 1.$$

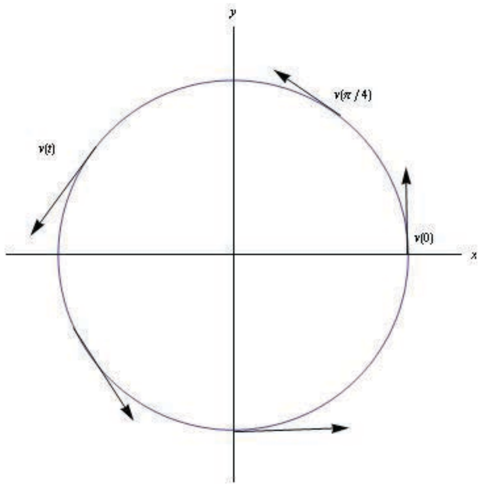
Esta ecuación describe a una elipse con centro en $(0, 1, 1)$, radio máximo $b = 2$ en la dirección y y radio mínimo $a = 1$ en la dirección x. A pesar de ser una curva en el espacio, la misma es plana, dado que toda se halla en el plano $z = 1$. Una parametrización puede ser:

$$\sigma_1(t) = (\cos t, 2\operatorname{sen} t + 1, 1)\,,\; 0 \leq t \leq 2\pi,$$

dado que se puede hacer la siguiente sustitución:

$$\begin{cases} \quad x & = \cos t \\ \frac{y-1}{2} = \operatorname{sen} t & \Rightarrow y = 2\operatorname{sen} t + 1 \\ \quad z & = 1. \end{cases}$$

Figura 4.11: Curva plana $x^2 + y^2 = 4$ y vectores velocidad



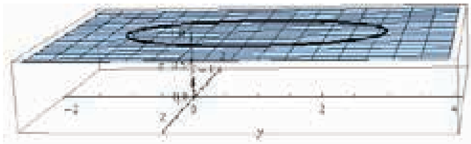
Una observación de estas dos curvas es que ambas son cerradas ya que:

1) $\left.\begin{array}{ll} \sigma(0) & = (\cos 0, \operatorname{sen} 0, 0) = (1,0,0) \\ \sigma(2\pi) & = (\cos(2\pi), \operatorname{sen}(2\pi), 0) = (1,0,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \sigma(0) = \sigma(2\pi);$

2) $\left.\begin{array}{ll} \sigma_1(0) & = (\cos 0, 2\operatorname{sen}(0) + 1, 0) = (1,1,0) \\ \sigma_1(2\pi) & = (\cos(2\pi), 2\operatorname{sen}(2\pi) + 1, 0) = (1,1,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \sigma_1(0) = \sigma_1(2\pi);$

y además las parametrizaciones sugeridas resultan ser regulares, lo cual puede probar el lector.

Figura 4.12: Curva en el espacio $4x^2 + (y-1)^2 = 4, z = 1$



4.2. Longitud de arco

¿Cuál es la longitud de una curva o trayectoria C? Si la curva C es parametrizable por una función $\sigma(t)$, sabemos que $c'(t)$ es el vector velocidad de dicha parametrización. Por otro lado, se sabe también mediante la física clásica newtoniana, sabemos que la distancia recorrida por una partícula puntual en un lapso de tiempo $[a,b]$ se calcula a partir de integrar a la rapidez, que es el módulo de la velocidad (tasa de cambio de la posición respecto del tiempo), es decir

$$\text{Distancia} = \int_a^b |v(t)| \; dt.$$

Por lo tanto, la distancia o longitud de recorrido de una partícula que se mueve a lo largo de la curva C debe ser:

$$\int_a^b \|c'(t)\| \; dt.$$

Lo anterior motiva la siguiente definición.

Definición 4.2.1. *Sea $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una trayectoria C^1 a trozos, tal que*

$$\sigma(t) = (\sigma_1(t), \sigma_2(t), ..., \sigma_n(t)).$$

*Su **longitud** se define como*

$$\int_C 1 \, ds = \int_a^b \|c'(t)\| \; dt = \int_a^b \sqrt{(\sigma_1'(t))^2 + (\sigma_2'(t))^2 + ... + (\sigma_n'(t))^2} \, dt, \qquad (4.2.1)$$

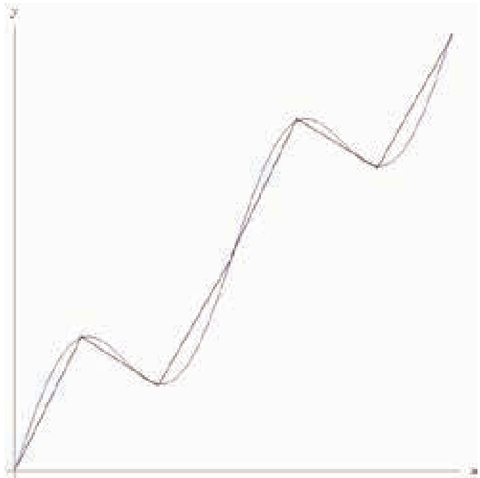
siendo ds el diferencial de arco, $ds = \sqrt{(\sigma_1'(t))^2 + (\sigma_2'(t))^2 + ... + (\sigma_n'(t))^2}$.

Esta definición resulta consistente por el siguiente razonamiento: si se supone que $n = 3$, entonces, $\sigma(t) = (\sigma_1(t), \sigma_2(t), \sigma_3(t))$, $t \in [a,b]$ y se puede probar mediante el método de aproximaciones poligonales, que básicamente se trata de aproximar a la curva por una poligonal (unión de segmentos) de segmentos, haciendo tender la cantidad de segmentos a infinito (y, por ende, el tamaño de los mismos, a 0).

Se parte el intervalo $[a,b]$ en m subintervalos de igual longitud:

$$a = t_0 < t_1 < ... < t_m = b,$$

Figura 4.13: Aproximación de la curva por poligonales



$$\text{long}(\Delta t_i) = \Delta t_i = t_{i+1} - t_i = \frac{b-a}{n} > 0\,,\ \forall i = 0, 1, ..., m-1$$

y se considera entonces la poligonal obtenida al unir pares de sucesivos de puntos $\sigma(t_i)$, $\sigma(t_{i+1})$ para $0 \leq i \leq m-1$. Además, se tiene que:

$$d(\sigma(t_{i+1}), \sigma(t_i)) = \|\sigma(t_{i+1}) - \sigma(t_i)\|$$

$$= \sqrt{(\sigma_1(t_{i+1}) - \sigma_1(t_i))^2 + (\sigma_2(t_{i+1}) - \sigma_2(t_i))^2 + (\sigma_3(t_{i+1}) - \sigma_3(t_i))^2}.$$

Por teorema del valor medio (TVM) de Lagrange:

$$\begin{cases} \dfrac{\sigma_1(t_{i+1}) - \sigma_1(t_i)}{\Delta t_i} = \sigma_1'(\eta_i) \Rightarrow \sigma_1(t_{i+1}) - \sigma_1(t_i) = \sigma_1'(\eta_i).\Delta t_i\,,\ \eta_i \in (t_i, t_{i+1}) \\ \dfrac{\sigma_2(t_{i+1}) - \sigma_2(t_i)}{\Delta t_i} = \sigma_2'(\xi_i) \Rightarrow \sigma_2(t_{i+1}) - \sigma_2(t_i) = \sigma_2'(\xi_i).\Delta t_i\,,\ \xi_i \in (t_i, t_{i+1}) \\ \dfrac{\sigma_3(t_{i+1}) - \sigma_3(t_i)}{\Delta t_i} = \sigma_3'(\zeta_i) \Rightarrow \sigma_3(t_{i+1}) - \sigma_3(t_i) = \sigma_3'(\zeta_i).\Delta t_i\,,\ \zeta_i \in (t_i, t_{i+1}). \end{cases}$$

Esto permite decir que la longitud del segmento que une a $\sigma(t_i)$ con $\sigma(t_{i+1})$ es

$$\|\sigma(t_i) - \sigma(t_{i+1})\| = \sqrt{(\sigma_1'(\eta_i))^2 + (\sigma_2'(\xi_i))^2 + (\sigma_3'(\zeta_i))^2}\Delta t_i.$$

Se define la siguiente suma

$$S_m = \sum_{i=0}^{m-1} \sqrt{(\sigma_1'(\eta_i))^2 + (\sigma_2'(\xi_i))^2 + (\sigma_3'(\zeta_i))^2}\Delta t_i\,.$$

que se puede observar que se trata de una suma de Riemann. Cuando $m \to \infty$, la poligonal aproxima mejor a la curva C y, por lo tanto:

$$\text{long}(C) = \lim_{m\to\infty} S_m.$$

Esta igualdad vale, por supuesto, en el caso de que este límite exista. Pero como σ_1', σ_2' y σ_3' son continuas en $[a,b]$, pues σ es C^1, resulta que existe $\lim_{m\to\infty}$ y entonces:

$$\begin{aligned}\text{long}(C) &= \lim_{m\to\infty} S_m = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=0}^{m-1} \sqrt{(\sigma_1'(\eta_i))^2 + (\sigma_2'(\xi_i))^2 + (\sigma_3'(\zeta_i))^2}\, \underbrace{\Delta t_i}_{\downarrow 0}, \\ &= \int_a^b \sqrt{(\sigma_1'(t))^2 + (\sigma_2'(t))^2 + (\sigma_3'(t))^2}\, dt.\end{aligned}$$

Ejemplo 4.2.2. Calcular la longitud de la circunferencia unitaria en el plano xy con centro en el origen.

Lo primero que se requiere para calcular la longitud con la definición anterior es una parametrización C^1 de la circunferencia. En este caso ya se había hallado una parametrización previamente, $\sigma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Si $\sigma'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t)$, entonces

$$\text{long}(C) = \int_0^{2\pi} \underbrace{\sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2 + \cos^2 t}}_{=1}\, dt = \int_0^{2\pi} 1\, dt = t\big|_0^{2\pi} = 2\pi.$$

Esta longitud coincide con la fórmula de perímetro, $perimetro = 2\pi.radio$, aplicada a la circunferencia en cuestión.

Ejemplo 4.2.3. Calcular la longitud de la elipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1, z = 1.$

En este caso se trata de una elipse plana en el espacio. Una parametrización puede ser $\beta(t) = (2\cos t, \sin t, 1)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, de modo que $\beta'(t) = (-2\operatorname{sen} t, \cos t, 0)$. Por lo tanto, la longitud será

$$\text{long}(C) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-2\operatorname{sen} t)^2 + (\cos t)^2 + (0)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4.\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}\, dt.$$

Esta integral, denominada elíptica, no tiene una primitiva conocida, por lo tanto, no se puede calcular explícitamente. Queda planteada hasta aquí solamente.

Una pregunta que sería muy importante hacernos (y responderla más aún) es si la longitud de la curva depende de la orientación elegida. Para ver esto, podemos suponer que se tiene una parametrización $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ y su parametrización opuesta $\alpha_{op}[a,b] \to \mathbb{R}^n$, definida por $\alpha_{op}(t) = \alpha o\, l(t)$, con $l(t) = b + a - t$. Entonces:

$$\int_a^b \left\|\alpha_{op}'(t)\right\| dt = \int_a^b \|\alpha'(l(t)).l'(t)\|\, dt = \int_a^b \|\alpha'(l(t)).(-1)\|\, dt = \int_a^b \|\alpha'(l(t))\|\, dt.$$

Si

$$\begin{cases} u &= l(t) \Rightarrow l(a) = b + a - a = b\,, l(b) = b + a - b = b \\ du &= l'(t)dt \Rightarrow du = -dt \end{cases}$$

la expresión queda

$$\int_b^a -\|\alpha'(u)\|\ du = \int_a^b \|\alpha'(u)\|\ du = \text{long}(C).$$

De modo que la respuesta es que no depende de la orientación elegida.

Otra pregunta un poco más difícil de justificar su respuesta es si la definición de longitud de arco depende de la parametrización que se haya elegido para integrar. De ser positiva la respuesta, dicha definición no sería consistente. Sin embargo, la respuesta es que no depende de la parametrización, aunque la buena definición será probada más adelante.

4.2.1. Práctica

Calcular la longitud de cada una de las siguientes curvas.

1) C el arco de parábola de ecuación $y = x^2$ entre los puntos $(-1, 1)$ y $(2, 4)$.

2) C la circunferencia de radio 3 con centro en $(-1, 2)$.

3) C el segmento de $\mathbb{R}^3$ que une $(2, 3, -1)$ con $(3, 2, 1)$.

4) $C \subset \mathbb{R}^3$ la intersección de $y = x^2$ con $x + z = 2$ en el primer octante.

4.3. Integrales de trayectoria

Con la misma idea anterior, en este apartado pretendemos definir y extender el concepto de integrales sobre curvas o trayectorias. En el caso anterior, lo presentamos solamente para la función $f(x_1, x_2, ..., x_n) = 1$, en tanto que ahora lo definiremos para cualquier función $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrable.

La curva sobre la que se integra se denomina *camino de integración* y las integrales a definir en esta y en la sección siguiente se utilizan para estudiar conceptos físicos como el trabajo, la masa lineal, la energía potencial, el flujo de calor, la circulación de un fluido, entre otros.

Definición 4.3.1. *Una aplicación $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se dice que es un **campo escalar** (o simplemente función escalar)*

Ejemplos de campos escalares son:

1) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2$;

2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x + y^2$.

Definición 4.3.2. *La integral de una función escalar $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, $n \in \mathbb{N}$ a lo largo de la trayectoria C está definida si existe $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $\sigma(t) = (\sigma_1(t), \sigma_2(t), ..., \sigma_n(t))$, que sea una parametrización C^1 ,y la función compuesta $f(\sigma(t)) = f(\sigma_1(t), \sigma_2(t), ..., \sigma_n(t))$ es continua en $[a, b]$. Se define entonces a la **integral de f sobre la trayectoria** C como*

$$\int_C f\, ds = \int_a^b f(\sigma(t)).\ \|\sigma'(t)\|\ dt = \int_a^b f(\sigma_1(t), \sigma_2(t), ..., \sigma_n(t)).\ \|\sigma'(t)\|\ dt. \quad (4.3.1)$$

Esta definición está motivada por el siguiente razonamiento: se supone $n = 3$ y el caso general se puede pensar de modo análogo. Si se subdivide el intervalo $[a, b]$ con una partición $a = t_0 < t_1 < ... < t_m = b$ se produce una descomposición de C en trayectorias C_i, $i = 0, 1, ..., m-1$ en $[t_i, t_{i+1}]$. En el apartado anterior demostramos que la longitud de arco de una curva es la integral de trayectoria sobre esa curva de la función $f = 1$, es decir, para cada C_i:

$$\Delta s_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|c_i'(t)\| \; dt \, , \; 0 \leq i \leq m-1.$$

A medida que m se hace más grande, Δs_i se aproxima a 0, pues long$(C_i) \to 0$ y f es aproximadamente constante para todo $(x, y, z) \in C_i$. Se considera

$$S_m = \sum_{i=0}^{m-1} f(x_i, y_i, z_i).\Delta s_i,$$

entonces,

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty} S_m &= \lim_{m\to\infty} \sum_{i=0}^{m-1} f(x_i, y_i, z_i).\Delta s_i \\ &\underbrace{=}_{\text{TVM}} \lim_{m\to\infty} \sum_{i=0}^{m-1} f(x_i, y_i, z_i). \|c'(t_i^*)\| .\Delta t_i \, , \; t_i^* \in (t_i, t_{i+1}) \\ &= \int_a^b f(c(t)). \|c'(t)\| \; dt = \int_C f \, ds. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.3.3. Dadas $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x+y$, C la curva definida por la intersección de los planos $y = x$, $x + y + z = 1$ en el primer octante. Calcular $\int_C f \, ds$.

Para poder calcular esta integral de trayectoria se debe hallar una parametrización regular de C. Si

$$\left.\begin{array}{ll} y & = x \\ x + y + z & = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow x + x + z = 1 \Rightarrow z = 1 - 2x \Rightarrow (x, x, 1 - 2x).$$

Por lo tanto, se define $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, $\sigma(t) = (t, t, 1 - 2t)$. Como la curva está en el primer octante, es decir $x, y, z \geq 0$, se deduce que $t \geq 0$ y $1 - 2t \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \geq t$, de modo que $[a, b] = [0, \frac{1}{2}]$. Luego,

$$\begin{aligned} \int_C f \, ds &= \int_0^{\frac{1}{2}} f(t, t, 1-2t). \underbrace{\|(1, 1, -2)\|}_{\|\sigma'(t)\|} \, dt \int_0^{\frac{1}{2}} 2t.\sqrt{1+1+4} \, dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} 2.\sqrt{6}.t. \, dt = \sqrt{6}t^2 \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}. \end{aligned}$$

Caso 4.3.4. *Si C es una curva plana parametrizada por $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, o sea $Im(\sigma) \subseteq \mathbb{R}^2$, y $f(x, y) \geq 0$, la integral de trayectoria de f a lo largo de C es*

$$\int_C f \, ds = \int_a^b f(\sigma(t)). \|\sigma'(t)\| \; dt$$

y puede interpretarse como el área de una pared de base C y altura $f(x, y)$

Ejemplo 4.3.5. Calcular el área de la porción de cilindro $x^2 + (y-2)^2 = 4$ que se encuentra por debajo del paraboloide $x^2 + y^2 = z$.

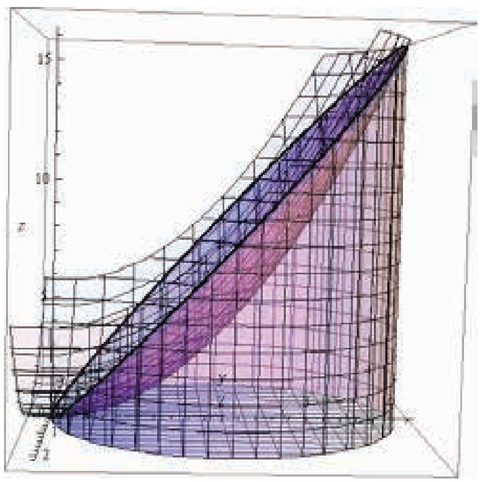
El área que hay que calcular es la de la región de la figura 4.14. La misma tiene como "piso" a la circunferencia plana C, definida por $x^2+(y-2)^2 = 4$. Considerando que el paraboloide impone la restricción $x^2 + y^2 = z \geq 0$, se puede definir la función "techo" $z = f(x, y) = x^2 + y^2$. De este modo, el área a calcular queda definida por la siguiente integral:

$$\text{Área} = \int_C f\, ds$$

Si se considera $\sigma : [0, 2\pi] \to C$, $\sigma(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t + 2)$, parametrización de la curva C, se tiene:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_C f\, ds = \int_0^{2\pi} f(2\cos t, 2\operatorname{sen} t + 2).\, \|\sigma'(t)\|\ dt \\ &= \int_0^{2\pi} 4{,}2\, dt = \left. 8t\right|_0^{2\pi} = 16\pi. \end{aligned}$$

Figura 4.14: Porción de cilindro $x^2 + (y-2)^2 = 4$ que se encuentra por debajo del paraboloide $x^2 + y^2 = z$



4.3.1. Propiedades de las integrales de trayectoria

Sean f y g funciones escalares, entonces se cumplen las siguientes propiedades

1) Linealidad:

$$\int_C a.f + b.g\, ds = a\int_C f\, ds + b\int_C g\, ds,$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Aplicando la deducción hecha para la definición a la función $a.f + b.g$ utilizando la partición del intervalo $[c, d]$ en el que se describe una parametrización de C:

$$\begin{aligned} S_m &= \sum_{i=0}^{m-1} (a.f + b.g)(x_i, y_i, z_i).\Delta s_i \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \left[a.f(x_i, y_i, z_i) + b.g(x_i, y_i, z_i)\right].\Delta s_i \\ &= a.\sum_{i=0}^{m-1} f(x_i, y_i, z_i).\Delta s_i + b.\sum_{i=0}^{m-1} g(x_i, y_i, z_i).\Delta s_i. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\lim_{m\to\infty} S_m = \lim_{m\to\infty} \left[a.\sum_{i=0}^{m-1} f(x_i, y_i, z_i).\Delta s_i + b.\sum_{i=0}^{m-1} g(x_i, y_i, z_i).\Delta s_i\right].$$

Por propiedad de suma de límites

$$\begin{aligned} &= a\left[\lim_{m\to\infty} \sum_{i=0}^{m-1} f(x_i, y_i, z_i)\Delta s_i\right] + b\left[\lim_{m\to\infty} \sum_{i=0}^{m-1} g(x_i, y_i, z_i)\Delta s_i\right] \\ &\underbrace{=}_{\text{TVM}} a\left[\lim_{m\to\infty} \sum_{i=0}^{m-1} f(x_i, y_i, z_i)\left\|c'(t_i^*)\right\|\Delta t_i\right] \\ &\quad + b\left[\lim_{m\to\infty} \sum_{i=0}^{m-1} g(x_i, y_i, z_i)\left\|c'(t_i^*)\right\|\Delta t_i\right],\ t_i^* \in (t_i, t_{i+1}) \\ &= a\left[\int_c^d f(c(t))\left\|c'(t)\right\|\, dt\right] + b\left[\int_c^d g(c(t))\left\|c'(t)\right\|\, dt\right] \\ &= a\left[\int_C f\, ds\right] + b\left[\int_C g\, ds\right]. \end{aligned}$$

2) Aditividad respecto del camino:

$$\int_C f\,ds = \int_{C_1} f\,ds + \int_{C_2} f\,ds$$

si

$$C = C_1 \cup C_2$$

es curva regular a trozos (C_1 y C_2 regulares no "encimadas").

Demostración. Si $C = C_1 \cup C_2$ tal que $C_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ y $C_2 : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ se hacen particiones de los intervalos $[a,b]$ y $[c,d]$. Luego se aplica la definición.

Ejemplo 4.3.6. Sea C la curva plana (en $\mathbb{R}^2$) dada por la unión de las curvas $y = x$ e $y = x^2$, siempre con $0 \le x \le 1$. Calcular $\int_C x\,ds$.
En este caso se trata de una curva cerrada y regular a trozos, ya que está compuesta por un segmento ($y = x$) y por una parábola ($y = x^2$), ambas curvas regulares (ver gráfico en el plano en la figura 4.15). Por la propiedad de aditividad respecto del camino tenemos que

$$\int_C x\,ds = \int_{C_1} x\,ds + \int_{C_2} x\,ds.$$

Entonces basta con calcular cada integral y luego sumar. Para ello hay que parametrizar a C_1

Figura 4.15: C dada por la unión de las curvas $y = x$ e $y = x^2$, con $0 \le x \le 1$



y C_2:

1) C_1: se parametriza con $\sigma_1(t) = (t,t)$, con $0 \leq t \leq 1$ y $\|\sigma_1'(t)\| = \|(1,1)\| = \sqrt{2}$. Entonces

$$\int_{C_1} x\,ds = \int_0^1 t.\sqrt{2}dt = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}t^2\right]_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2) C_2: se parametriza con $\sigma_2(t) = (t,t^2)$, con $0 \leq t \leq 1$ y $\|\sigma_2'(t)\| = \|(1,2t)\| = \sqrt{1+4t^2}$. Entonces

$$\int_{C_1} x\,ds = \int_0^1 t.\sqrt{1+4t^2}dt = \left[\frac{1}{12}\left(1+4t^2\right)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{5^{3/2}-1}{12}.$$

Finalmente,

$$\int_C x\,ds = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{5^{3/2}-1}{12}.$$

4.3.2. Práctica

Calcular las integrales de línea $\int_C f ds$ en los casos.

1) $f(x,y) = x+3y$, C la curva imagen de $\alpha(t) = (t-1, 3t+2)$, $-2 \leq t \leq 1$.

2) $f(x,y,z) = y$, C la curva imagen de $\alpha(t) = (2\cos t, t, 2\operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

3) $f(x,y,z) = \frac{z}{x^2+y^2}$, C la curva imagen de $\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $0 \leq t \leq \pi$.

4.4. Integrales de línea

En esta sección trabajaremos con integrales de funciones vectoriales sobre curvas.

Definición 4.4.1. *Una función $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que*

$$F(\overline{x}) = F(x_1, x_2, ..., x_n) = (F_1(\overline{x}), F_2(\overline{x}), ..., F_m(\overline{x}))$$

*se denomina **campo vectorial**.*

Ejemplos de campos vectoriales son:

1) $F(x,y,z) = ((x-y)^2, e^z, y)$, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$;

2) $F(x,y,z) = (z + ln(x^2+1), sen(y))$, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

Si F es un campo de fuerza en el espacio (campo vectorial de $\mathbb{R}^3$), entonces una partícula en el espacio puede verse afectada por esa fuerza F. Podemos suponer que la partícula se mueve a lo largo de la imagen de una trayectoria C mientras sobre sobre ella actúa dicha fuerza F. Si C es una línea recta y F es constante, entonces el trabajo realizado por F al mover a la partícula a lo largo de esa trayectoria es $w_F = F.d$, siendo d el vector desplazamiento. Si

la trayectoria es una curva cualquiera, podemos pensar que está formada por una sucesión de desplazamientos rectos infinitesimales:

$$\begin{aligned} w_F &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} F(c(t_i)).\Delta s_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} F(c(t_i)).c'(t_{i^*}).\Delta t_i, \\ &= \int_a^b F(c(t)).c'(t)\, dt. \end{aligned}$$

Con esto se puede introducir la siguiente definición.

Definición 4.4.2. *Sea C una curva parametrizada por una función $c : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ regular a trozos y sea $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial definido y continuo sobre C. La* ***integral de línea*** *de F a lo largo de C se representa y define por*

$$\int_C F.ds = \int_a^b F(c(t)).c'(t)\, dt. \tag{4.4.1}$$

De la definición anterior conviene resaltar el hecho de que, en principio, esta integral depende de:

1) la función vectorial F,

2) el camino o trayectoria C.

Notación 4.4.3. *En $\mathbb{R}^3$, si $F(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$ y C es una curva tal que $C(t) = (x(t), y(t), z(t))$, entonces*

$$\int_C F.ds = \int_C F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz.$$

4.4.1. Propiedades de las integrales de línea

Las integrales de línea tienen las mismas propiedades que las de trayectoria, que no probaremos, dado que sus demostraciones son muy similares a las realizadas en el apartado anterior.

Sean F y G campos vectoriales, entonces se cumplen las siguientes propiedades

1) Linealidad:

$$\int_C a.F + b.G\, ds = a \int_C F\, ds + b \int_C G\, ds,$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R}$$

2) Aditividad respecto del camino:

$$\int_C F\, ds = \int_{C_1} F\, ds + \int_{C_2} F\, ds$$

si $C = C_1 \cup C_2$ es curva regular a trozos (C_1 y C_2 regulares).

Se puede analizar el comportamiento de las integrales de línea al efectuar un cambio de parámetros: sea α, una parametrización continua en $[a, b]$ de una curva C, y $u : [c, d] \to [a, b]$ derivable tal que $u' \neq 0, \forall t \in [c, d]$. Se define otra parametrización $\beta : [c, d] \to Im(\alpha)$ como $\beta(t) = \alpha(u(t))$. Esta es una forma de generalizar lo hecho anteriormente respecto de reparametrizar (σ y $\sigma_{op} = \sigma(u(t))$, con $u(t) = b + a - t$).

Se dice que β y α son *trayectorias equivalentes*, ya que recorren el mismo camino y u es la función "cambio de parámetro", β es una reparametrización de la curva C.

Una observación importante es la siguiente.

Observación 4.4.4. Sea C una curva tal que $\alpha : [a, b] \to C$ es una parametrización de ella. Sea $u : [c, d] \to [a, b]$ derivable, tal que $u' \neq 0, \forall t \in [c, d]$. Se considera otra parametrización $\beta : [c, d] \to Im(\alpha)$ definida como $\beta(t) = \alpha(u(t))$. Entonces,

1) Si $u' > 0$, entonces u es creciente y α y β recorren a C con la misma orientación ($\alpha(a) = \beta(c)$ y $\alpha(b) = \beta(d)$).

2) Si $u' < 0$, entonces u es decreciente y α y β recorren a C con orientaciones opuestas ($\alpha(a) = \beta(d)$ y $\alpha(b) = \beta(c)$).

En la primera condición, se dice que β preserva la orientación de α, mientras que en la segunda β la invierte (esto sucede cuando $u(t) = a + b - t$, pues $u'(t) = -1 < 0$ siempre, que es el caso de reparametrización visto con anterioridad).

Si bien anteriormente mencionamos que las integrales de línea dependían de la parametrización elegida para la curva C, este teorema mostrará que solo dependen en cuanto al signo, no al módulo, y que esto está directamente relacionado con la preservación o la inversión de la orientación.

Teorema 4.4.5. *Sea C una curva de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ y α y β dos parametrizaciones de C regulares a trozos. Entonces,*

$$\int_C F.d\alpha = \int_C F.d\beta \tag{4.4.2}$$

si ambas recorren a C con la misma orientación y

$$\int_C F.d\alpha = -\int_C F.d\beta \tag{4.4.3}$$

si recorren a C con distinta orientación.

Demostración. Dadas α y β parametrizaciones regulares de C con las hipótesis del teorema, se cumple por regla de la cadena que:

$$\beta(t) = \alpha(u(t)) \Rightarrow \beta'(t) = \alpha'(u(t))u'(t).$$

Entonces,

$$\int_C F.d\beta = \int_c^d F(\beta(t)).\beta'(t)\,dt = \int_c^d F(\beta(t)).\alpha'(u(t)).u'(t)\,dt.$$

Si se hace la siguiente sustitución

$$\left.\begin{array}{ll} v & = u(t) \\ dv & = u'(t)dt \end{array}\right\} \Rightarrow \int_{u(c)}^{u(d)} F(\alpha(v)).\alpha'(v)\, dv.$$

Se tienen dos casos:

- Si $u' > 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} u(d) = b \\ u(c) = a \end{array}\right\} \Rightarrow \int_a^b F(\alpha(v)).\alpha'(v)\, dv = \int_C F.d\alpha,$

- Si $u' < 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} u(d) = a \\ u(c) = b \end{array}\right\} \Rightarrow \int_b^a F(\alpha(v)).\alpha'(v)\, dv = -\int_a^b F(\alpha(v)).\alpha'(v)\, dv = -\int_C F.d\alpha.$

Para el caso C regular a trozos, la idea es parametrizar cada pedazo y hacer lo anterior en cada uno.

Ejemplo 4.4.6. Calcular $\int_C F.ds$, siendo $F(x,y,z) = (-y,x,0)$, C la curva definida por la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ con el plano $y + z = 2$, recorrida en sentido antihorario vista desde el origen.

La curva en cuestión es una elipse, ya que se corta a un cilindro circular vertical con un plano no vertical. Una parametrización posible es la siguiente:

$$\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))\,, \left\{\begin{array}{ll} x(t) & = 2\cos t \\ y(t) & = 2\operatorname{sen} t \\ z(t) & = 2 - y \Rightarrow z = 2 - 2\operatorname{sen} t \end{array}\right. , \; t \in [0, 2\pi].$$

Además, es una parametrizacion regular, ya que no existe $t \in [0, 2\pi]$ tal que

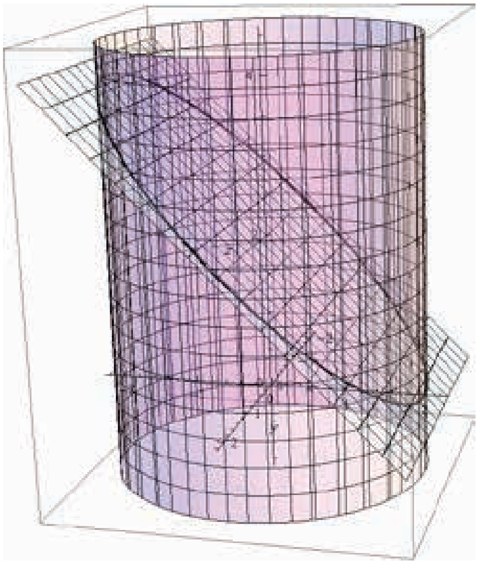
$$\sigma'(t) = (-2\operatorname{sen} t, 2\cos t, -2\cos t) = (0,0,0).$$

Antes de calcular la integral hay que ver si σ preserva la orientación de la curva (que ya vino explicitada):

$$\left\{\begin{array}{ll} \sigma(0) & = (2,0,2) \\ \sigma(\frac{\pi}{2}) & = (0,2,0) \\ \sigma(\pi) & = (-2,0,2) \\ \sigma'(0) & = (0,2,-2) \\ \sigma'(\frac{\pi}{2}) & = (-2,0,0) \\ \sigma'(\pi) & = (0,-2,2). \end{array}\right.$$

Esto sugiere que la curva es recorrida por σ en sentido de las agujas del reloj, vista desde el origen. De modo que σ invierte la orientación de C, entonces, se tienen dos opciones: se busca otra parametrización que preserve la orientación de C (no es difícil, ya que se puede calcular

Figura 4.16: Curva intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ con el plano $y + z = 2$



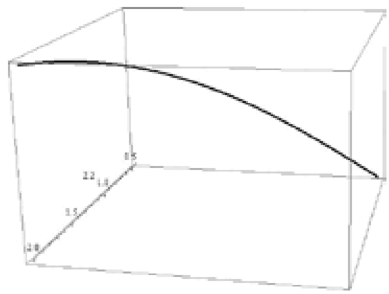
como σ_{op}, pero es un poco extenso) o se calcula con σ utilizando el teorema anterior:

$$\begin{aligned}
\int_C F.ds &= -\int_0^{2\pi} F(\sigma(t)).\sigma'(t)\,dt \\
&= -\int_0^{2\pi} F(2\cos t, 2\operatorname{sen} t, 2-2\operatorname{sen} t).(-2\operatorname{sen} t, 2\cos t, -2\cos t)\,dt \\
&= -\int_0^{2\pi} (-2\operatorname{sen} t, 2\cos t, 0).(-2\operatorname{sen} t, 2\cos t, -2\cos t)\,dt \\
&= -\int_0^{2\pi} 4\operatorname{sen}^2 t + 4\cos^2 t\,dt = -\int_0^{2\pi} 4\,dt = -4.t|_0^{2\pi} = -8\pi.
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.4.7. Sea C la curva en el primer octante ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$) dada por las condiciones $z = \cos y$ e $x + y = 2$. Si $F(x, y, z) = (-y, x, z)$, calcular $\int_C F.ds$ si C está orientada de izquierda a derecha observada desde el semieje positivo de las x. La condición $z = \cos y$ corresponde a una superficie (tipo sábana) trigonométrica, pues para cada x tenemos $z = \cos y$. El plano $x + y = 2$ es paralelo al eje z y atraviesa la superficie anterior como puede se muestra en la figura 4.17. Para cada $(x, y, z) \in C$ tenemos que

$$\begin{cases} z = \cos y \\ x = 2 - y \\ x, y, z \geq 0. \end{cases}$$

Figura 4.17: Curva en el primer octante, definida por $z = \cos y$ e $x + y = 2$



Entonces, una parametrización posible para C es

$$\sigma(t) = (2 - t, t, \cos t),$$

con

$$\begin{cases} z & = \cos t \geq 0 \ \Rightarrow 0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2} \\ x & = 2 - t \geq 0 \ \Rightarrow t \leq 2 \\ y & = t \geq 0. \end{cases}$$

Como $\dfrac{\pi}{2} < 2$, entonces, queda que

$$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Ahora hay que ver cómo recorre esta parametrización la curva en cuestión:

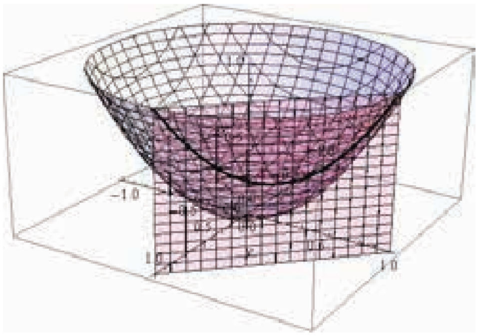
$$\begin{cases} \sigma(0) & = (2, 0, 1) \\ \sigma(\frac{\pi}{2}) & = (2 - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0) \\ \sigma'(t) & = (-1, 1, -sen\, t) \neq (0, 0, 0)\, \forall t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Lo anterior dice que σ recorre a C desde $(2, 0, 1)$ hasta $(2 - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0)$ sin detenerse (pues su velocidad, σ' nunca se anula). Si se ubican estos dos puntos en el gráfico de C (figura 4.17) puede concluirse que σ recorre a C preservando su orientación. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_C F\, ds &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(2 - t, t, \cos t).(-1, 1, -sen\, t)\, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-t, 2 - t, \cos t).(-1, 1, -\operatorname{sen} t)\, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 - \cos t \operatorname{sen} t\, dt = \left[2t - \frac{\operatorname{sen}^2 t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.4.8. Sea C la curva dada por la intersección de $z = x^2 + y^2, x + y = 1$ con $z \leq 1$, orientada desde $(1, 0, 1)$ hasta $(0, 1, 1)$. Calcular $\int_C (\operatorname{sen} y, z, x).ds$. Se puede notar que la curva se encuentra en el paraboloide $z = x^2 + y^2$. Si se atraviesa con el plano $x + y = 1$ y se tiene en cuenta que $z \leq 1$ queda el gráfico de la curva como en el de la figura 4.18.

Figura 4.18: Curva intersección de $z = x^2 + y^2, x + y = 1$ con $z \leq 1$



Además, como

$$\begin{cases} z & = x^2 + y^2 \leq 1 \\ y & = 1 - x, \end{cases}$$

se puede pensar en una parametrización $\sigma(t)$ tomando a $t = x$, y queda de esta manera

$$\sigma(t) = (t, 1 - t, t^2 + (1 - t)^2),$$

con la condición $t^2 + (1 - t)^2 \leq 1$:

$$t^2 + (1 - t)^2 = 2t^2 - 2t + 1 \leq 1 \Rightarrow 2t(t - 1) \leq 0 \Rightarrow 0 \leq t \leq 1.$$

Ahora hay que ver si esta parametrización preserva la orientación de C:

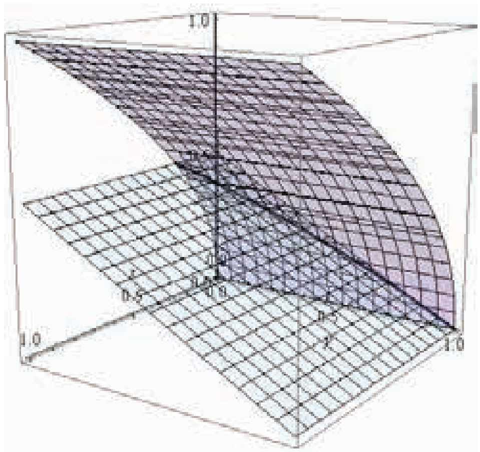
$$\begin{cases} \sigma(0) & = (0, 1, 1) \\ \sigma(1) & = (1, 0, 1) \\ \sigma'(t) & = (1, -1, 4t - 2) \neq (0, 0, 0) \, \forall t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

De modo que σ recorre regularmente (sin detenerse) C desde $(0, 1, 1)$ hasta $(1, 0, 1)$, así que invierte la orientación de la curva. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_C (seny, z, x).ds &= -\int_0^1 (sen(1 - t), 2t^2 - 2t + 1, t).(1, -1, 4t - 2)\, dt \\ &= -\int_0^1 \operatorname{sen}(1 - t) + 2t^2 - 1\, dt = -\left[\cos(1 - t) + \frac{2t^3}{3} - t\right]_0^1 \\ &= -\left[1 + \frac{2}{3} - 1 - \cos 1\right] = -\frac{2}{3} + \cos 1. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.4.9. Sea C la curva dada por la intersección de $x = z^2, y + 2z = 1$ en el primer octante, orientada de izquierda a derecha vista desde el origen. Calcular $\int_C (e^x, z^3, y).ds$. La

Figura 4.19: Curva intersección de $x = z^2, y + 2z = 1$ en el primer octante



curva se encuentra en el cilindro parabólico $x = z^2$, sumado a las otras condiciones el gráfico de la curva es el correspondiente a la figura 4.19. Como pueden ponerse en las dos primeras condiciones a x e y en función de z, una parametrización posible es:

$$\sigma(t) = (t^2, 1 - 2t, t).$$

Para ver los límites de la variable t se tiene que analizar el hecho de que se está en el primer octante, entonces,

$$\begin{cases} t^2 & \geq 0 \\ 1 - 2t & \geq 0 \Rightarrow t \leq \dfrac{1}{2} \\ t & \geq 0. \end{cases}$$

Luego, $0 \leq t \leq \dfrac{1}{2}$. Por otro lado,

$$\begin{cases} \sigma(0) & = (0, 1, 0) \\ \sigma(\frac{1}{2}) & = (\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{2}) \\ \sigma'(t) & = (2t, -2, 1) \neq (0, 0, 0) \, \forall t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

de modo que σ recorre C sin detenerse desde $(0, 1, 0)$ hasta $\left(\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{2}\right)$, y como el primer punto está más a la izquierda, visto desde el origen, entonces se puede decir que σ preserva la orientación. Entonces,

$$\begin{aligned}\int_C (e^x, z^3, y).ds &= \int_0^{\frac{1}{2}} (e^{t^2}, t^3, 1-2t).(2t, -2, 1)\, dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} 2te^{t^2} - 2t^3 + 1 - 2t\, dt = \left[e^{t^2} - \frac{t^4}{2} + t - t^2\right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= e^{1/4} - \frac{25}{32}.\end{aligned}$$

Ejemplo 4.4.10. Sea C la curva perímetro del triángulo de vértices $(0,0,2)$, $(1,0,1)$ y $(0,1,1)$, recorrida en ese orden. Si $F(x,y,z) = (y, 3x, z)$, calcular $\int_C F.ds$.

La curva es fácil de graficar (ver figura 4.20) y se puede observar que los lados de los triángulos se encuentran sobre los planos $y = 0$, $x = 0$ y $z = 1$. Como se trata de una curva que es unión de segmentos (curvas C^1), C resulta C^1 a trozos, así que se puede describir por medio de las tres curvas segmentos de que la componen, que se llamarán C_1, C_2 y C_3:

$$\left\{\begin{array}{c} C_1 \to x + z = 2\,,\ 0 \le x \le 1 \\ C_2 \to y + z = 2\,,\ 0 \le y \le 1 \\ C_3 \to x + y = 1\,,\ 0 \le x \le 1. \end{array}\right.$$

Cada una de estas curvas tiene la orientación que hereda de la orientaciónde la curva C, como se muestra en la figura 4.20.

Con lo anterior, no debería resultar difícil parametrizar a estas tres curvas:

$$\left\{\begin{array}{c} \sigma_1(t) = (t, 0, 2-t)\,,\ 0 \le t \le 1\,,\ Im(\sigma_1) = C_1 \\ \sigma_2(t) = (0, t, 2-t)\,,\ 0 \le t \le 1\,,\ Im(\sigma_2) = C_2 \\ \sigma_3(t) = (t, 1-t, 1)\,,\ 0 \le t \le 1\,,\ Im(\sigma_3) = C_3. \end{array}\right.$$

Con las siguientes derivadas

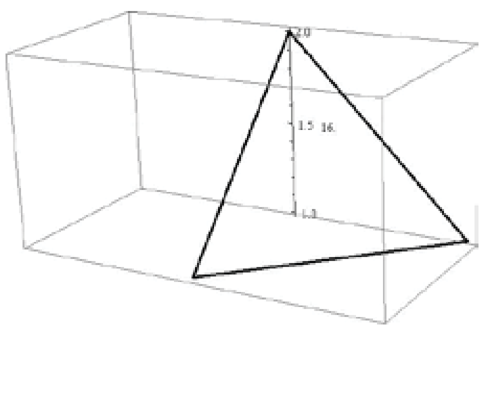
$$\left\{\begin{array}{c} \sigma_1'(t) = (1, 0, -1) \neq (0,0,0) \\ \sigma_2'(t) = (0, 1, -1) \neq (0,0,0) \\ \sigma_3'(t) = (1, -1, 0) \neq (0,0,0). \end{array}\right.$$

Si se analiza la orientación de estas parametrizaciones se puede observar que si bien σ_1 preserva orientación de C_1, σ_2 y σ_3 invierten la orientación de C_2 y C_3, respectivamente. Por lo

cual, queda planteada la siguiente integración:

$$\begin{aligned}
\int_C F.ds &= \int_{C_1} F.ds + \int_{C_2} F.ds + \int_{C_3} F.ds \\
&= \int_{\sigma_1} F(\sigma_1).\sigma_1' dt - \int_{\sigma_2} F(\sigma_2).\sigma_2' dt - \int_{\sigma_3} F(\sigma_3).\sigma_3' dt \\
&= \int_0^1 (0, 3t, 2-t).(1, 0, 1)\, dt - \int_0^1 (1-t, t, 1).(1, -1, 0)\, dt \\
&\quad - \int_0^1 (t, 0, 2-t).(0, 1, -1)\, dt \\
&= \int_0^1 2 - t\, dt - \int_0^1 1 - 2t\, dt - \int_0^1 t - 2\, dt \\
&= \left[2t - \frac{t^2}{2}\right]_0^1 - \left[t - t^2\right]_0^1 - \left[\frac{t^2}{2} - 2t\right]_0^1 \\
&= \left(2 - \frac{1}{2}\right) - (1-1) - \left(\frac{1}{2} - 2\right) = 3.
\end{aligned}$$

Figura 4.20: Curva perímetro del triángulo de vértices $(0, 0, 2)$, $(1, 0, 1)$ y $(0, 1, 1)$



Como observamos en este último ejemplo, las cuentas se hacen un poco largas dado que hay que considerar tres curvas, parametrizarlas una por una e integrar. Cabe preguntarse si no existe algún método que permita simplificar un poco las cosas. Algo interesante para destacar es el hecho de que la curva anterior era una curva cerrada, que además de implicar que su principio y fin están conectados, implica que es borde de alguna superficie, en este caso del triángulo mismo. En el capítulo 9 veremos que, efectivamente, se puede calcular esta misma integral mediante esta relación curva frontera- superficie.

El ejemplo siguiente muestra otro tipo de problema en el momento de integrar un campo vectorial sobre una curva.

Ejemplo 4.4.11. Sea C la curva dada en el ejemplo 4.3.6. Calcular $\int_C F\, ds$, si $F(x, y) = (e^{x^2} - \cos x^2 + xy, ln(y^2 + 1) - y)$ y C está orientada de manera antihoraria.

Ya se tenían las parametrizaciones y, considerando la aditividad de las integrales de línea, se tiene que

$$\int_C F.ds = \int_{C_1} F.ds = \int_{C_2} F.ds.$$

Como C está orientada de manera antihoraria, C_1 debe estar orientada desde $(1, 1)$ hasta $(0, 0)$, es decir, descendente, en tanto C_2 debe estar orientada de manera ascendente (de $(0, 0)$ a $(1, 1)$). Así que

$$\begin{aligned} \int_{C_1} F.ds &= -\int_0^1 (e^{t^2} - \cos t^2 + t^2, ln(t^2 + 1) - t).(1, 1)\, dt \\ &= -\int_0^1 e^{t^2} - \cos t^2 + t^2 + ln(t^2 + 1) - t\, dt, \end{aligned}$$

con signo negativo pues σ_1 invierte orientación de C_1 (pensar por qué), y

$$\begin{aligned} \int_{C_2} F.ds &= -\int_0^1 (e^{t^2} - \cos t^2 + t^3, ln(t^4 + 1) - t^2).(1, 2t)\, dt \\ &= -\int_0^1 e^{t^2} - \cos t^2 - t^3 + 2t\, ln(t^4 + 1)\, dt, \end{aligned}$$

con signo positivo pues σ_2 preserva la orientación de C_2 (le sugerimos al lector pensar por qué). Aquí se puede apreciar que el problema fundamental es que las integrales que quedan son imposibles de calcular, porque hay primitivas que se desconocen totalmente. En el capítulo 7 mostraremos una forma mucho más simple de calcular este tipo de integrales.

4.4.2. Práctica

Calcular la integral de línea del campo vectorial F a lo largo de las curvas C que se indican.

1) $F(x, y) = (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy)$, C la curva de ecuación $y = x^2$ desde $(-1, 1)$ hasta $(3, 9)$.

2) $F(x, y) = (4 - y, x)$, C la curva imagen de la función $\alpha(t) = (2(t - \operatorname{sen} t), 2(1 - \cos t))$; $0 \leq t \leq 2\pi$ con la orientación inducida por esta parametrización.

3) $F(x, y, z) = ((y^2 - z^2, 2yz, x^2)$, C la curva imagen de la función $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$; $0 \leq t \leq 1$ con la orientación opuesta a la inducida por esta parametrización.

4) $F(x, y) = (x^2, y^2)$, C la curva $|x| + |y| = 2$ orientada en sentido negativo.

Capítulo 5

Integrales sobre superficies

5.1. Superficies parametrizables

De la experiencia escolar y vivencial se conocen varias superficies: círculos, rectángulos, triángulos, entre otras. Estas son regiones que pueden pensarse en el plano real, es decir que son planas. Por otro lado, se conocen muchos otros ejemplos de superficies que no son planas: cáscaras de esferas, conos, cilindros huecos y las caras de un poliedro.

El problema tal vez no consista en identificar qué es aquello que se reconoce como superficie sino cómo definir dicho objeto geométrico. En el primer capítulo dimos por aceptado que una superficie es una región de volumen nulo, es decir que puede tener área pero no "profundidad" o "grosor". Una idea un poco más general pero aún informal es que una superficie es un lugar del espacio donde cada punto tiene dos grados de libertad, un grado más de libertad que en una curva (que solo depende de una variable t). Sin embargo, también puede definirse una superficie mediante una o varias ecuaciones. Esencialmente, no existe una única forma de definirlas.

Lo que haremos a continuación es trabajar con ciertas superficies, algunas de las más usuales, describiéndolas de distintas maneras: mediante ecuaciones y parametrizando, fundamentalmente.

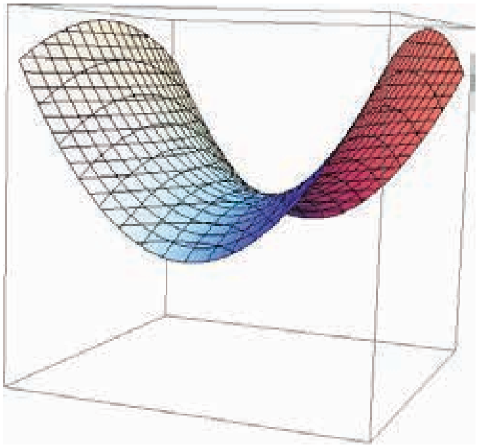
5.1.1. Superficies recurrentes

En la primera parte de este libro vimos regiones del plano y del espacio, definidas por desigualdades. Muchas de las superficies que estudiaremos se expresan de forma muy similar a esas regiones.

A continuación damos solo algunos ejemplos de superficies.

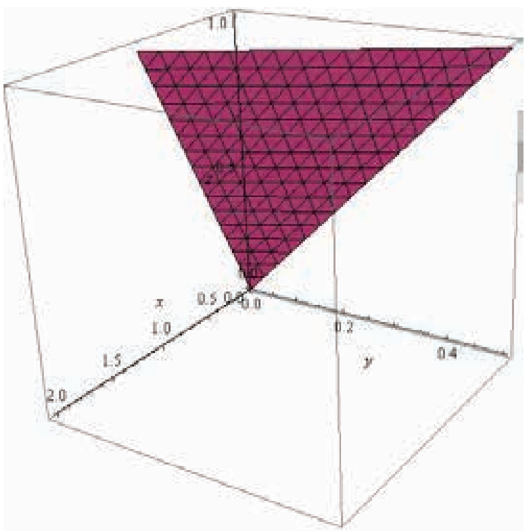
Ejemplo 5.1.1. Un plano $ax + by + cz = d$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ es una superficie del espacio, no acotada, dado que si se piensa en la ecuación paramétrica de un plano $\pi : X = \lambda.\overline{v} + \beta.\overline{w} + \overline{p}$ se tienen dos grados de libertad λ y β, que recorren cada uno la recta real de forma independiente. Esto coincide con la definición informal de superficie dada hasta el momento.

Figura 5.1: Superficie



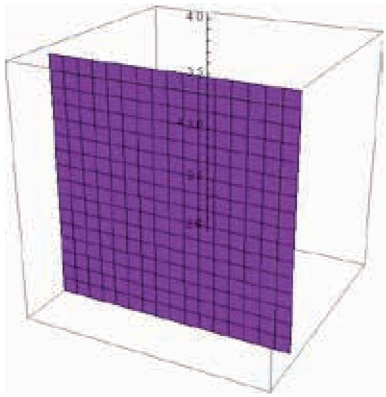
Ejemplo 5.1.2. La superficie $S = \{(x, y, z) : \ x + 2y = z, \ x, y, z \geq 0 \ , \ z \leq 1\}$ es la porción en el primer cuadrante del plano $x - 2y - z = 0$. Esta superficie es acotada y es una región triangular. Su gráfico corresponde al de la figura 5.2.

Figura 5.2: Porción triangular de un plano



Ejemplo 5.1.3. La superficie $S = \{(x,y,z):\ x=2\,,-1\leq y\leq 3\,,2\leq z\leq 4\}$ es el rectángulo $[-1,3]\times[2,4]$ en el plano $x=2$.

Figura 5.3: Porción rectangular de un plano



Antes de continuar con los ejemplos, resulta importante la siguiente definición.

Definición 5.1.4. *Una superficie S se dice **cerrada** si es frontera de un sólido en $\mathbb{R}^3$.*

Que una superficie no sea cerrada no quiere decir que sea abierta, simplemente no es cerrada.

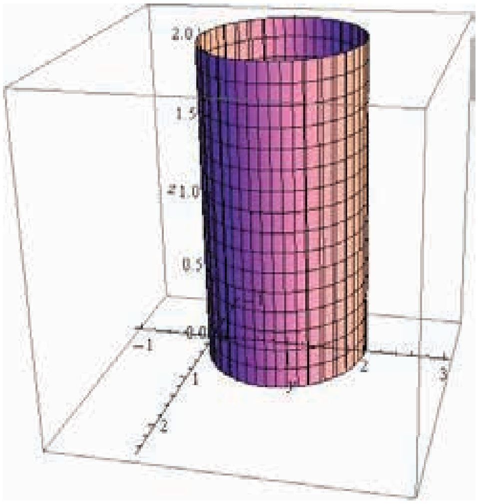
Ejemplo 5.1.5. La región $S = \left\{(x,y,z):\ x^2+(y-1)^2=1\,,0\leq z\leq 2\right\}$ es la cáscara de un cilindro circular de radio 1 con eje de simetría $(0,1,z)$, acotado por la condición $0\leq z\leq 2$, pero no es una superficie cerrada, ya que entre los puntos de S no están los que conforman las tapas circulares laterales, a saber: el disco $x^2+(y-1)^2\leq 1\,,z=0$ y el disco $x^2+(y-1)^2\leq 1\,,z=2$. De estas tapas circulares, los únicos puntos que satisfacen la ecuación que describe a S son los de sus bordes (las circunferencias $x^2+(y-1)^2=1$, $z=0,2$). Su dibujo es el correspondiente a la figura 5.4.

En cambio, en el siguiente ejemplo se puede observar a una superficie cerrada.

Ejemplo 5.1.6. Sea S la superfice frontera del paralelepípedo $[0,1]\times[1,2]\times[2,3]$. Esta superficie es la unión de las seis caras que conforman el borde de este cubo, es decir:

$$S=\begin{cases} S_1=[0,1]\times[1,2]\times\{2\}\\ S_2=[0,1]\times[1,2]\times\{3\}\\ S_3=[0,1]\times\{1\}\times[2,3]\\ S_4=[0,1]\times\{2\}\times[2,3]\\ S_5=\{0\}\times[1,2]\times[2,3]\\ S_6=\{1\}\times[1,2]\times[2,3].\end{cases}$$

Figura 5.4: Cilindro circular $x^2 + (y-1)^2 = 1\,,0 \leq z \leq 2$



Cada una de las superficies $S_i, i = 1, 2, ..., 6$, es un cuadrado en distintos planos. Queda definida $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5 \cup S_6 = \bigcup_{i=1}^{6} S_i$ (ver desde figura 5.6a hasta figura 5.8b)y es la superficie frontera unión de las seis caras del cubo $Q = [0, 1] \times [1, 2] \times [2, 3]$.

Figura 5.5: Superficie frontera del cubo $Q = [0, 1] \times [1, 2] \times [2, 3]$

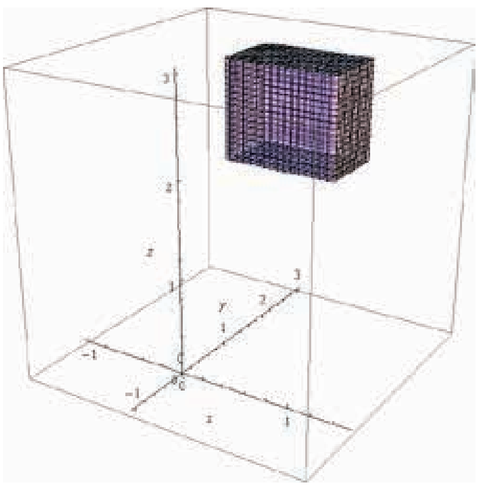


Figura 5.6: Bordes S_1 y S_2 del cubo $Q = [0,1] \times [1,2] \times [2,3]$

(a) S_1 **(b)** S_2

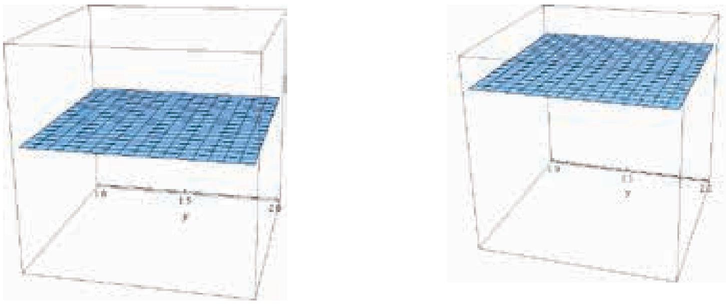


Figura 5.7: Bordes S_3 y S_4 del cubo $Q = [0,1] \times [1,2] \times [2,3]$

(a) S_3 **(b)** S_4

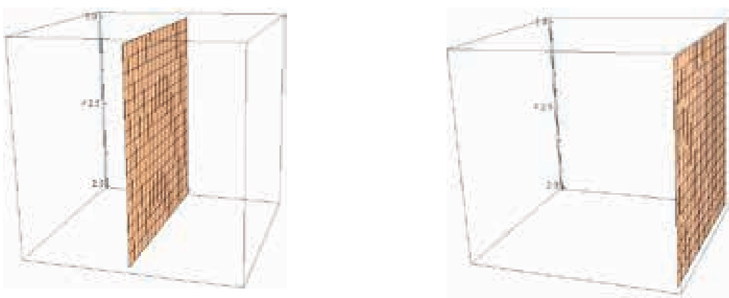
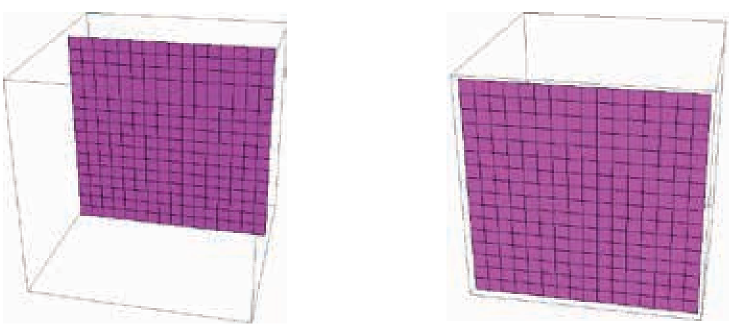


Figura 5.8: Bordes S_5 y S_6 del cubo $Q = [0,1] \times [1,2] \times [2,3]$

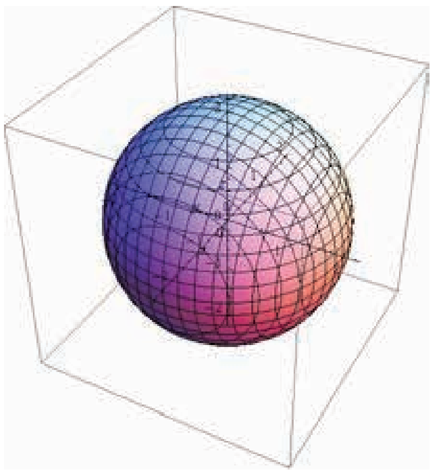
(a) S_5 **(b)** S_6



En general, una superficie cerrada está descripta ya como "superficie frontera" de algún sólido o cuerpo, aunque hay algunas excepciones, como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.1.7. La región $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$ es la cáscara de una esfera de radio 2 y centro en el origen. Esta región es cerrada, sin que se lo haya dicho explícitamente, dado que es frontera de la esfera maciza $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ (ver figura 5.9).

Figura 5.9: Esfera hueca $x^2 + y^2 + z^2 = 4$



Ejemplo 5.1.8. La región $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 4 \, , z \leq 0\}$ es el hemisferio sur de la misma cáscara esférica del ejemplo anterior. No obstante, no se trata en este caso de una superficie cerrada, dado que le falta el hemisferio norte o la superficie $z = 0$ con $x^2 + y^2 \leq 4$ (ver figura 5.10).

El ejemplo anterior muestra que, dada una superficie no cerrada, a veces es posible "cerrarla" de diversas maneras, quedando distintos sólidos que la tienen como parte de su frontera. Esto será muy importante más adelante, por lo que siempre se debe tener en cuenta que no existe una única forma de cerrar una superficie, entendiendo cerrar como considerar a una superficie mayor que sea la unión de la que se tenía con otras. Algo que sí es cierto es que en general existe una forma más conveniente de cerrar, dependiendo de lo que se necesite hacer o de la forma de la superficie inicial, pero eso es algo que se discutirá con posterioridad.

Ejemplo 5.1.9. La región $S = \{(x, y, z) : x^2 = z \, , -1 \leq y \leq 1 \, , z \leq 4\}$ es la cáscara de un cilindro parabólico y no es una superficie cerrada (sugerimos al lector pensar por qué). Su gráfico es el correspondiente a la figura 5.11.

Queda como ejercicio sugerido para el lector decidir si las superficies de los ejemplos que siguen son cerradas o no.

Figura 5.10: Hemisferio sur de la esfera hueca $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

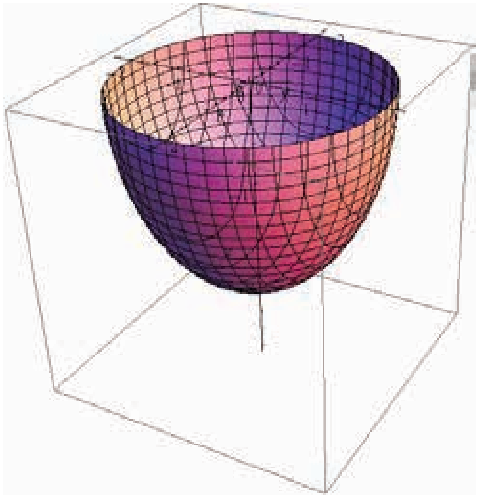
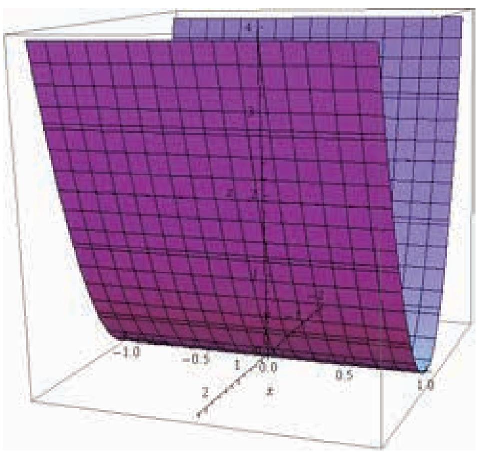


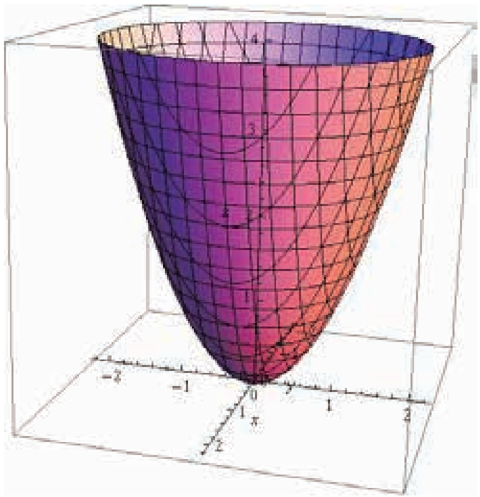
Figura 5.11: Cilindro parabólico $x^2 = z\,, -1 \leq y \leq 1\,, z \leq 4$



Ejemplo 5.1.10. La región $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = z\,, z \leq 4\}$ es la cáscara de un paraboloide circular con eje de simetría $(0, 0, z)$, vértice $(0, 0, 0)$ y acotado por la condición $z \leq 4$ (ver figura 5.12).

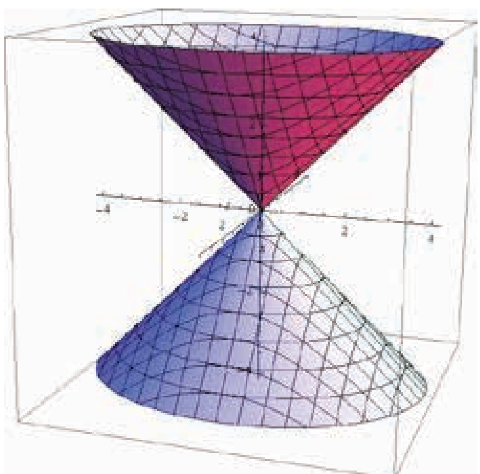
Ejemplo 5.1.11. La región $S = \{(x, y, z) : 3x^2 + y^2 = z^2\}$ es la cáscara de un doble cono

Figura 5.12: Paraboloide circular $x^2 + y^2 = z\,, z \leq 4$



elíptico con eje de simetría $(0, 0, z)$ y vértice doble en el origen. No es una superficie acotada, ya que la variable z no está acotada (ver figura 5.13).

Figura 5.13: Doble cono elíptico $3x^2 + y^2 = z^2$



En todos los casos, para graficar se puede aplicar la misma metodología que hicimos con

las regiones del espacio en el primer capítulo: fijar una variable, ver qué curva queda, luego generalizar, y hacer lo mismo con las tres variables en cuestión.

5.1.2. Representación de superficies: parametrizaciones

Para expresar analíticamente una superficie existen tres métodos (no necesariamente disjuntos los dos últimos).

1) Representación implícita: una superficie puede describirse por medio de una ecuación como la siguiente

$$f(x, y, z) = k\,,\; k \in \mathbb{R},$$

siendo f una función escalar de tres variables.

2) Representación explícita: se puede expresar una variable en función de las otras dos.

3) Representación paramétrica o vectorial: una superficie S puede representarse mediante una función vectorial $\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $Im(\Phi) = S$. En este caso $\Phi(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v))$, siendo esta la ecuación vectorial de la parametrización de S.

Damos ejemplos de este tipo de representaciones.

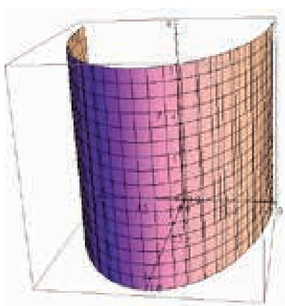
1) La ecuación $x^2 + y^2 = 1$ representa en $\mathbb{R}^3$ un cilindro con eje de simetría $(0, 0, z)$ y radio 1 que no está acotado. Se trata de una representación implícita.

2) Si se considera el mismo cilindro, pero con la condición $y \geq 0$ se tiene que

$$\begin{cases} x &= x \\ y &= \sqrt{1 - x^2} \\ z &= z. \end{cases}$$

Este medio cilindro no acotado esta representado de forma explícita (ver figura 5.14).

Figura 5.14: Medio cilindro $S = \left\{(x, y, z) : \; y = \sqrt{1 - x^2}\,,\; z \in \mathbb{R}\right\}$



3) La ecuación paramétrica de un plano $\pi : X = \lambda.\overline{v} + \beta.\overline{w} + \overline{p}$ es una representación paramétrica de dicha superficie, con $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$, ya que el plano no es una superficie acotada. Dados tres puntos, A, B, C cualesquiera no alineados coplanares (en un mismo plano), se pueden armar infinitas parametrizaciones del plano que los contiene:

$$\pi : X = \lambda.(A - B) + \beta.(B - C) + C,$$

$$\pi : X = \lambda.(A - C) + \beta.(B - A) + A,$$

$$\pi : X = \lambda.(A - B) + \beta.(A - C) + B,$$

y estas son solo alguna de ellas, ya que puedo considerar cualquier múltiplo de las direcciones.

Este último ejemplo deja clara la idea de que, dada una superficie, no existe una única representación paramétrica. Otro ejemplo que ilustra bastante este punto es el siguiente.

Ejemplo 5.1.12. El cono simple acotado, definido por $x^2 + y^2 = z^2, 0 \leq z \leq 1$ es una superficie que se puede parametrizar de dos maneras:

- Sabiendo que $z \geq 0$ se puede expresar a esta variable en función de las otras dos, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, entonces una parametrización $\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es

$$\Phi(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2}) \,, \, (x, y) \in D;$$

  pero, ¿cómo es el dominio D? No es difícil de responder si se proyecta la superficie en el plano xy, quedando un disco de radio 1 y centro en $(0, 0)$, ya que ese es el radio máximo que alcanza el cono pues $z \leq 1$. Entonces,

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\right\}.$$

  Esta parametrización cumple que tiene como imagen el cono acotado en cuestión y además resulta una función C^1 (le sugerimos al lector probarlo).

- Considerando que se trata de un cono circular se puede pensar en él en coordenadas cilíndricas, si se fija alguno de los tres parámetros, r, θ o z, o se lo expresa en función de los otros dos:

$$\left\{\begin{array}{ll} x(r,\theta) & = r\cos(\theta) \\ y(r,\theta) & = r\,\mathrm{sen}(\theta) \\ z(r,\theta) & = \sqrt{x^2+y^2} = r \end{array}\right. , \left\{\begin{array}{ll} 0 & \leq r \leq 1 \\ 0 & \leq \theta \leq 2\pi. \end{array}\right.$$

  Esto sale de lo ya hecho en la sección de cambio de variables para regiones de $\mathbb{R}^3$. Lo único que cambia es que para describir una superficie se requiere que alguna de las componentes quede en función de las otras dos, puesto que parametrizar significa expresar algo del espacio con dos parámetros, en lugar de tres, como lo sería con un sólido, por ejemplo. Finalmente, queda la siguiente parametrización:

$$\Psi(r, \theta) = (r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta), r) \,, \, (r, \theta) \in [0, 1] \times [0, 2\pi].$$

Una diferencia entre las dos parametrizaciones es que en la primera el dominio D era un disco, en tanto que en la segunda es un rectángulo. Más adelante se verá que algunas parametrizaciones resultan más útiles que otras para calcular lo que llamaremos integrales de superficie, y que esto está relacionado, entre otras cosas, con las características del dominio D y las funciones componentes de la parametrización.

Si la función parametrización Φ de una superficie S resulta 1 a 1 (inyectiva), además de ser continua, se dice que $S = Im(\Phi)$ es una *superficie paramétrica simple*, en la cual el adjetivo "simple" sugiere que no se cruza a sí misma. Esta definición incluso puede extenderse a una parametrización Φ que sea 1 a 1, salvo sobre una curva, es decir, sobre una región de área nula. Por ejemplo, en la parametrización del cono del ejemplo anterior, tenemos que

$$\Psi(r_1, \theta_1) = \Psi(r_2, \theta_2)$$

si y solo si

$$\begin{cases} r_1 \cos\theta_1 = r_2 \cos\theta_2 \\ r_1 \operatorname{sen}\theta_1 = r_2 \operatorname{sen}\theta_2 \\ r_1 = r_2 := r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \cos\theta_1 = \cos\theta_2 \\ \operatorname{sen}\theta_1 = \operatorname{sen}\theta_2 \\ r_1 = r_2 := r \end{array} \Leftrightarrow \theta_1 = \theta_2 + k\pi \, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

puesto que el coseno y el seno son funciones periódicas con período 2π. Como el rango de θ es de 0 a 2π, entonces: $\theta_1 = 0$ y $\theta_2 = 2\pi$ y, entonces,

$$\Psi(r, 0) = \Psi(r, 2\pi)\,,\ \forall r \in [0, 1].$$

De modo que Ψ es inyectiva en todo el dominio $D = [0, 1] \times [0, 2\pi]$, salvo en los puntos que están sobre el segmento $(r, 0)$, que tiene área igual a 0. Con este tipo de superficies y parametrizaciones que cumplan esto se trabajará en este libro.

En las siguientes secciones trabajaremos el concepto de área y de integral de superficies y brindaremos múltiples ejemplos que incluirán variadas parametrizaciones, por lo cual en esta sección no continuaremos dando ejemplos.

Ejemplo 5.1.13. (Un modelo de cómo parametrizar una superficie cerrada). Si se considera S, la superficie frontera del paralelepípedo del ejemplo 5.1.6, una forma de parametrizar esta superficie cerrada es parametrizar cada una de sus caras por separado:

1) Para S_1: ya que x e y se mueven en un rectángulo y además $z = 2$, se puede pensar en la parametrización.

$$\Phi_1(x, y) = (x, y, 2)\,,\ (x, y) \in [0, 1] \times [1, 2].$$

2) Para S_2: ya que x e y también se mueven en un rectángulo y $z = 3$:

$$\Phi_2(x, y) = (x, y, 3)\,,\ (x, y) \in [0, 1] \times [1, 2].$$

3) Para S_3: ya que x y z se mueven en un rectángulo e $y = 1$, se puede pensar en la parametrización:

$$\Phi_3(x, z) = (x, 1, z)\,,\ (x, z) \in [0, 1] \times [2, 3].$$

4) Para S_4: ya que x y z también se mueven en un rectángulo e $y = 2$:

$$\Phi_4(x, z) = (x, 2, z)\,,\ (x, z) \in [0, 1] \times [2, 3].$$

5) Para S_5: ya que y y z se mueven en un rectángulo y $x = 0$, se puede pensar en la parametrización:

$$\Phi_5(x, z) = (0, y, z)\,,\ (y, z) \in [1, 2] \times [2, 3].$$

6) Para S_5: ya que y y z se mueven en un rectángulo y $x = 1$, se puede pensar en la parametrización:

$$\Phi_6(x, z) = (1, y, z)\,,\ (y, z) \in [1, 2] \times [2, 3].$$

Notemos que, dado que $S_i = Im(\Phi_i)$, para todo $i = 1, 2, ..., 6$, resulta que $S = Im(\Phi_1) \cup Im(\Phi_2) \cup Im(\Phi_3) \cup Im(\Phi_4) \cup Im(\Phi_5) \cup Im(\Phi_6) = \bigcup_{i=1}^{6} Im(\Phi_i)$. Esto dice que S está parametrizada por partes.

Otra forma de parametrizar la superficie S es considerar una única función que sirva de parametrización para toda la superficie:

$$\Phi(u, v) = \begin{cases} (u, v, 2) & \text{si} \quad (u, v) \in [0, 1] \times [1, 2] \\ (u, 1, v) & \text{si} \quad (u, v) \in [0, 1] \times [2, 3] \\ (0, u, v) & \text{si} \quad (u, v) \in [1, 2] \times [2, 3] \\ (u - 1, v, 3) & \text{si} \quad (u, v) \in [1, 2] \times [1, 2] \\ (u, 2, v + 2) & \text{si} \quad (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1] \\ (1, u, v + 2) & \text{si} \quad (u, v) \in [1, 2] \times [0, 1]. \end{cases}$$

Queda entonces bien definida Φ en el rectángulo $[0, 2] \times [0, 3]$ y $Im(\Phi) = S$ como función partida. Lo único a tener en cuenta es que Φ no será diferenciable en los (u, v) que estén en los segmentos que separan a los sub-rectángulos del dominio en los que la función cambia de vector. Es que la imagen en cada uno de esos segmentos corresponde a una arista en el paralelepípedo S (en la próxima sección veremos que eso corresponde al hecho de que allí no existe plano tangente).

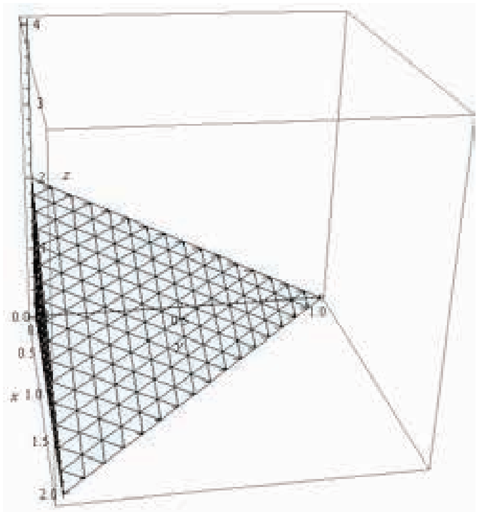
En general, al tener una superficie que es unión de otras superficies más simples conviene describirla parametrizando a trozos, es decir, cada superficie que la compone. Eso será de mucha utilidad en los temas que desarrollaremos en las próximas secciones.

Ejemplo 5.1.14. Parametrizar la superficie frontera del sólido

$$W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x + 2y + z \leq 2,\ x, y, z \geq 0\right\}.$$

En este caso, el sólido W es un tetraedro de vértices $(0, 0, 0)$, $(2, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 2)$ (ver figura 5.15). La superficie frontera S es la unión de las cuatro caras triangulares de este tetraedro S_1, S_2, S_3 y S_4 (ver figuras 5.15, 5.16a, 5.16b, 5.17a y 5.17b), por lo cual se puede parametrizar cada cara por separado.

Figura 5.15: Tetraedro $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x + 2y + z \leq 2, \; x, y, z \geq 0\}$



1) Para S_1: es un triángulo en el plano xz, es decir $y = 0$, entonces $x+z \leq 2$, con $x, z \geq 0$ y

$$\Phi_1(x, z) = (x, 0, z)\,, D_1 = \begin{cases} 0 & \leq x \leq 2 \\ 0 & \leq z \leq 2 - x. \end{cases}$$

Es una parametrización de una superficie plana, al igual que sucede con S_2 y S_3.

2) Para S_2: es un triángulo en el plano yz, es decir $x = 0$, entonces $2y + z \leq 2$, con $y, z \geq 0$ y

$$\Phi_2(y, z) = (0, y, z)\,, D_2 = \begin{cases} 0 & \leq y \leq 1 \\ 0 & \leq z \leq 2 - 2y. \end{cases}$$

3) Para S_3: es un triángulo en el plano xy, es decir, $z = 0$, entonces $x + 2y \leq 2$, con $x, y \geq 0$ y

$$\Phi_3(x, y) = (x, y, 0)\,, D_3 = \begin{cases} 0 & \leq y \leq 1 \\ 0 & \leq x \leq 2 - 2y. \end{cases}$$

4) Para S_4: es un triángulo en el plano $x + 2y + z = 2$, entonces $z = 2 - x - 2y$ (se podría despejar también a x o a y del mismo modo, solo que se eligió en este caso z):

$$\Phi_3(x, y) = (x, y, 2 - x - 2y).$$

Pero para describir la región en donde esta parametrización está definida hay que mirar la sombra de esta superficie S en el plano xy. En efecto, se trata del triángulo S_3, de modo que el dominio es el mismo que el de la parametrización de S_3, es decir $D_4 = D_3$.

Figura 5.16: Bordes S_1 y S_2 del tetraedro $x + 2y + z \leq 2$, $x, y, z \geq 0$

(a) S_1 **(b)** S_2

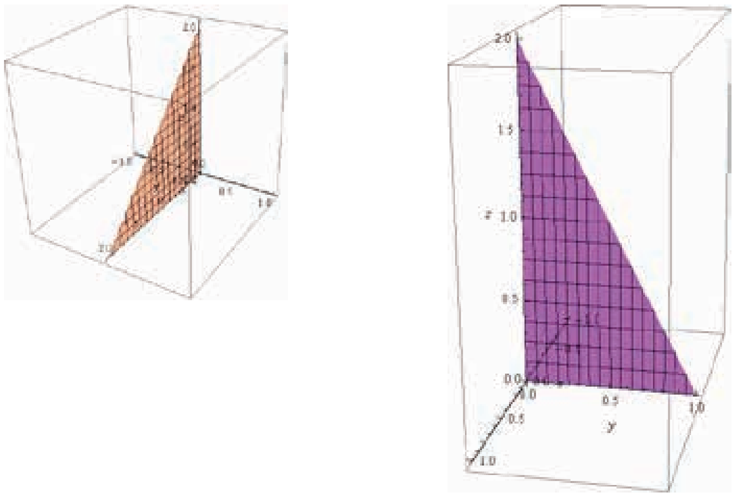
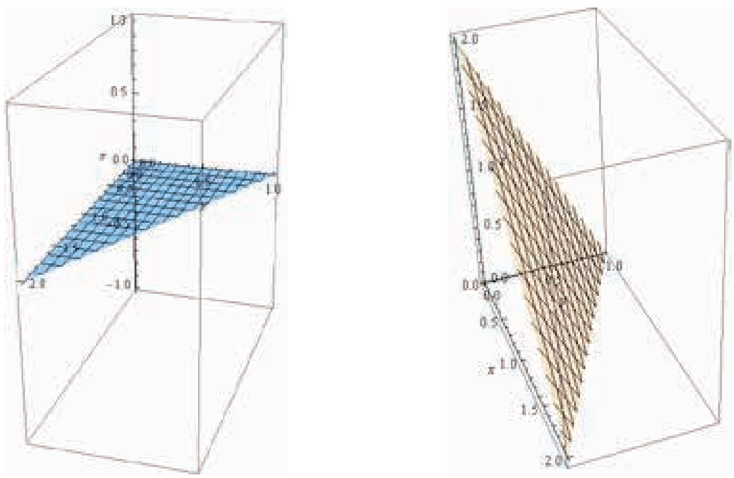


Figura 5.17: Bordes S_3 y S_4 del tetraedro $x + 2y + z \leq 2$, $x, y, z \geq 0$

(a) S_3 **(b)** S_4



5.2. Área de una superficie

La idea de esta sección es poder dar una forma explícita de cálculo de áreas para superficies parametrizables.

5.2.1. Producto vectorial fundamental

Sea S una superficie tal que existe una parametrización $\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$, $\Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, con x, y, z derivables en D. Entonces, se pueden considerar los siguientes vectores:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u,v) & = (\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}), \frac{\partial \Phi}{\partial u} : D \to \mathbb{R}^3 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u,v) & = (\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}), \frac{\partial \Phi}{\partial u} : D \to \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Al producto cruz $\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}$ se lo denomina *producto vectorial fundamental*:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} = det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

5.2.2. Regularidad y singularidad de superficies: noción analítica y geométrica

Si un punto $(u_0, v_0) \in D$ cumple que $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$ y $\frac{\partial \Phi}{\partial v}$ son continuas y $\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u_0, v_0) \neq (0,0,0)$ se dice que (u_0, v_0) es *punto regular* y que $\Phi(u_0, v_0)$ es *valor regular* de Φ. Los puntos (u_0, v_0) en los que $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$ o $\frac{\partial \Phi}{\partial v}$ no son continuas o que $\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u_0, v_0) = (0,0,0)$ se llaman *puntos singulares*. Una superficie $S = \Phi(D)$ se dice que es *regular* si todos sus valores son regulares, aunque puede ser regular para una parametrización y singular para otra. Lo que sucede es que, en muchos casos, las singularidad de S trasciende a cualquier parametrización.

Una interpretación geométrica de los puntos regulares y singulares es la siguiente: si se considera un segmento horizontal D_0 en el plano xy, su imagen en la superficie S es $\Phi(D_0)$ si $\Phi(u,v)$ es parametrización de S. Dicha imagen es una curva, es decir que una variable, u o v, es constante. Supongamos que $v = cte$, de modo que la curva imagen es una u-curva. El vector $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$ resulta ser entonces el vector velocidad de la curva.

Cuando u aumenta en una diferencia llamada Δu, un punto en $\Phi(u,v)$ se desplaza en el espacio $\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right\| \Delta u$. Análogamente, si se fija u y se aumenta a v en Δv, $\Phi(u,v)$ se desplaza en el espacio $\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| \Delta v$. Esto sugiere que un rectángulo contenido en D de área $\Delta u . \Delta v$ del plano se convierte en una región de $\Phi(D)$ aproximada por el paralelogramo determinado por los lados $\frac{\partial \Phi}{\partial u} \Delta u$ y $\frac{\partial \Phi}{\partial v} \Delta v$. Ese paralelogramo tiene área

$$\text{A(Paralelogramo)} = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \underbrace{\Delta u}_{\in \mathbb{R}} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \underbrace{\Delta v}_{\in \mathbb{R}} \right\| = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| \Delta u \Delta v.$$

La última igualdad se obtiene a partir de la propiedad de linealidad del producto vectorial. Lo que queda finalmente es el producto vectorial fundamental multiplicado por los dos incrementos, una en la dirección u y el otro en la dirección v. Lo que sugiere lo obtenido es que la longitud del producto vectorial fundamental puede imaginarse como un factor de proporcionalidad de áreas. En los puntos donde es nulo, el paralelogramo degenera en una curva o en un punto, en tanto que en cada punto regular, los vectores $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$ y $\frac{\partial \Phi}{\partial v}$ determinan un plano que

tiene como normal a $\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}$.
Una cuestión muy importante es el hecho de que $\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}$ es ortogonal a $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$ y a $\frac{\partial \Phi}{\partial v}$ y es no nulo en cada valor regular $P = (x_0, y_0, z_0)$ de S. Más aún, el vector $\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}$ es ortogonal a toda curva regular en la superficie S, por lo cual el plano que pasa por ese punto P regular y que tiene como vector normal a $\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u_0, v_0)$ se llamará *plano tangente*. La continuidad de las derivadas parciales $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$ y $\frac{\partial \Phi}{\partial v}$ asegurará que ese plano tangente se mueva con continuidad en una superficie regular, es decir, en donde no haya aristas o picos habrá continuidad de $\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}$ y $\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \neq (0, 0, 0)$. Esto se ve de la siguiente manera.

Se considera una superficie S regular parametrizada por $\Phi : D \to S$ y sea C_1 una curva plana en D. Entonces, $C = \Phi(C_1)$ es la curva imagen de C_1 regular, de modo que $C \in S$. Se puede ver que cada punto de C resulta perpendicular a $\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}$ pues si C_1 está parametrizada por $\alpha : [a, b] \to C_1, \alpha(t) = (u(t), v(t))$, entonces, $C = Im(C_1)$ es $\Phi\, o\, \alpha(t) = \Phi(\alpha(t)) = (X(\alpha(t)), Y(\alpha(t)), Z(\alpha(t)))$ con $\Phi\, o\, \alpha : [a, b] \to C$. Lo que se quiere ver es que $\Phi\, o\, \alpha'$ es perpendicular a $\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}$ y con ello lo que se quería probar, usando la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}(\Phi\, o\, \alpha)'(t) &= \left(\frac{\partial X}{\partial u}u'(t) + \frac{\partial X}{\partial v}v'(t), \frac{\partial Y}{\partial u}u'(t) + \frac{\partial Y}{\partial v}v'(t), \frac{\partial Z}{\partial u}u'(t) + \frac{\partial Z}{\partial v}v'(t)\right) \\ &= (\frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v})(u'(t), v'(t)) = \frac{\partial \Phi}{\partial u}u'(t) + \frac{\partial \Phi}{\partial v}v'(t).\end{aligned}$$

Esto ya muestra que $(\Phi\, o\, \alpha)'$ es perpendicular a $\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}$ pues

$$\begin{aligned}(\Phi\, o\, \alpha)'\left[\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right] &= \left[\frac{\partial \Phi}{\partial u}u'(t) + \frac{\partial \Phi}{\partial v}v'(t)\right].\left[\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right] \\ &= u'(t)\frac{\partial \Phi}{\partial u}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right) + v'(t)\frac{\partial \Phi}{\partial v}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right) = 0.\end{aligned}$$

Para obtener este resultado es fundamental la observación de que las derivadas parciales de Φ son perpendiculares al producto vectorial fundamental. Por esta razón, al vector $\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}$ se lo denomina *vector normal* a la superficie y no necesariamente es de norma 1 pero sí resulta perpendicular a S en cada punto de ella.

Figura 5.18: Incrementos Δv y Δu

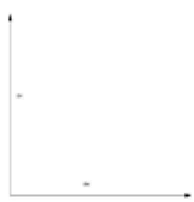
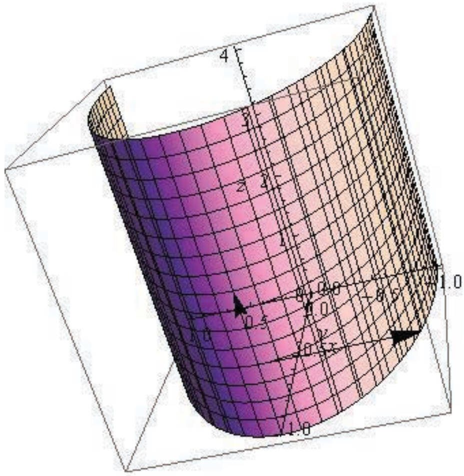


Figura 5.19: Incrementos Δv y Δu en el espacio



Definición 5.2.1. *Se llama* ***plano tangente*** *a una superficie S en P al plano de ecuación*

$$\pi_P : \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right)(u_0, v_0).(x, y, z) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right)(u_0, v_0).\underbrace{(x_0, y_0, z_0)}_{=P}. \tag{5.2.1}$$

Observación 5.2.2. La definición de plano tangente anterior corresponde a su ecuación implícita, dada por el vector normal $\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u_0, v_0)$ y por un punto cualquiera del plano, en este caso (x_0, y_0, z_0), que es a su vez un punto de la superficie. También se puede describir el plano tangente en virtud de dos direcciones linealmente independientes (no múltiplos) de este. Si la parametrización es regular, dos direcciones posibles son los vectores de derivadas parciales $\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u_0, v_0)$ y $\frac{\partial \Phi}{\partial v}(u_0, v_0)$. Entonces, la ecuación paramétrica del plano tangente en el punto (x_0, y_0, z_0) es

$$\pi_P : X = \lambda.\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u_0, v_0) + \beta.\frac{\partial \Phi}{\partial v}(u_0, v_0) + (x_0, y_0, z_0), \lambda, \beta \in \mathbb{R}. \tag{5.2.2}$$

Ejemplo 5.2.3. El plano tangente de un plano cualquiera $\pi : ax+by+cz = d, a, b, c, d \in \mathbb{R}$, es él mismo, puesto que el vector normal a este es siempre el mismo. Esto se puede justificar de la siguiente manera: si $c \neq 0$ una parametrización de π es $\Phi(u, v) = (u, v, \frac{d-au-bv}{c})$ con $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ (esta parametrización surge simplemente del hecho de despejar a z en función de x y de y en la ecuación implícita del plano), entonces,

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial u} = (1, 0, -\frac{a}{c}) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial v} = (0, 1, -\frac{b}{c}) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} = det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & -\frac{a}{c} \\ 0 & 1 & -\frac{b}{c} \end{pmatrix} = \left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, 1\right).$$

Lo primero que se puede observar es que el vector normal del plano π es un múltiplo del vector $\frac{\partial\Phi}{\partial u} \times \frac{\partial\Phi}{\partial v} = (\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, 1)$, ya que

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u} \times \frac{\partial\Phi}{\partial v} = (\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, 1).c = (a, b, c).$$

El vector normal a este y a cualquier plano es constante y esa es una propiedad exclusiva de los planos.

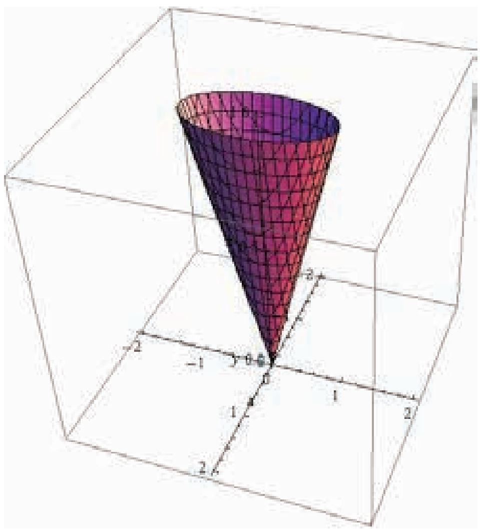
Ejemplo 5.2.4. Hallar, si existe, el plano tangente de la superficie $4x^2 + y^2 = z^2, 0 \leq z \leq 1$ en los siguiente puntos:

1) $(0, 1, 1)$;

2) $(0, 0, 0)$.

El gráfico de la superficie S en este caso es el cono elíptico $x^2 + \frac{y^2}{4} = \frac{z^2}{4}$ (sale de dividir a ambos lados por 4). Es claro que los dos puntos pertenecen a S, dado que verifican la ecuación y la desigualdad que la define. Si se observa su gráfico se puede decir que $(0, 0, 0)$ no es un valor regular, puesto que allí está el vértice de este doble cono (y es un pico).

Figura 5.20: Cono elíptico $x^2 + \frac{y^2}{4} = \frac{z^2}{4}$, $0 \leq z \leq 1$



1) Es conveniente hallar una parametrización del cono, utilizando la descripción hecha en coordenadas cilíndricas modificadas pero fijando alguna de las variables:

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= 2r\,\text{sen}\,\theta \\ z &= \sqrt{4x^2 + y^2} \Rightarrow z = \sqrt{4(r\cos\theta)^2 + (2r\,\text{sen}\,\theta)^2} = 2r. \end{cases}$$

De modo que $\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, 2r\,\text{sen}\,\theta, 2r)$ es una parametrización de S si $r \leq \frac{1}{2}$ pues $z = 2r \leq 1$. Esto sugiere que el dominio D de esta parametrización será

$$\begin{cases} 0 \leq r \leq \frac{1}{2} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

Ahora hay que calcular las derivadas parciales para hallar el vector normal:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial r} & = (\cos\theta, \text{sen}\,\theta, 2) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} & = (-r\,\text{sen}\,\theta, r\cos\theta, 0). \end{cases}$$

Para calcular el plano tangente hace falta hallar (r,θ) tal que

$$\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, 2r\,\text{sen}\,\theta, 2r) = (0,1,1)$$

$$\begin{cases} r\cos\theta & = 0 \Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \vee \theta = \frac{3\pi}{2} \\ r\,\text{sen}(\theta) & = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \\ 2r & = 1 \Rightarrow r = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow (r,\theta) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Nótese que fueron necesarias de las tres ecuaciones para definir a θ, además del hecho de que $r \neq 0$.

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{\partial \Phi}{\partial r}\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}\right) & = (0,1,2) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}\right) & = \left(-\frac{1}{2}, 0, 0\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial r} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = det\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \left(0, 1, -\frac{1}{2}\right).$$

De modo que la ecuación del plano tangente a S que pasa por $(0,1,1)$ es

$$\begin{aligned} \pi_{(0,1,2)} \quad &: \quad (0,1,-\frac{1}{2}).(x,y,z) = (0,1,-\frac{1}{2}).(0,1,1) \\ &: \quad y - \frac{z}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2) Utilizando la misma parametrización que en el punto anterior, se puede observar que existen infinitos puntos de la forma $(0,\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, tales que $\Phi(0,\theta) = (0,0,0)$, que es el vértice de este cono. Además, como $r = 0$, resulta que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(0,\theta) = (-0\,sen\theta, 0\cos\theta, 0) = (0,0,0).$$

Todo esto dice, por un lado, que la parametrización no es inyectiva en el $(0,0,0)$ (que es un punto y, por lo tanto, tiene área nula o contenido nulo), y, por el otro, dice que $(0,0,0)$ es un valor regular, haciendo que la superficie no sea regular en su vértice. Esta no regularidad en este punto implica que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(0,\theta) = (\cos\theta, \text{sen}\,\theta, 2) \times (0,0,0) = (0,0,0),$$

y entonces no se podría hallar el plano tangente porque esta parametrización no tiene como valor regular al $(0,0,0)$. Pero es mucho peor que eso en este caso, puesto que una condición elemental para que haya plano tangente es la suavidad de la superficie y un cono carece de ella en el vértice, independientemente de la parametrización que se elija. El lector podría buscar otras parametrizaciones del cono y notar que nunca tienen como valor regular el origen. Esto se puede pensar de la siguiente manera: el plano tangente es la mejor aproximación lineal (de orden 1) de la superficie en cada punto (recordar que en cada punto hay un plano tangente que puede ser distinto), entonces pensar en un plano que se aproxime o "pegue" lo mejor posible a S en ese punto lo tiene que hacer en un entorno alrededor del mismo (es la noción de límite en más de una variable), pero no hay ninguno que pueda hacer eso, ya que solo se acercarían por ciertas direcciones.

Ejemplo 5.2.5. ¿Es el paraboloide $x^2+y^2=z$ una superficie regular en $(0,0,0)$? De acuerdo con lo visto en el ejemplo anterior, se podría pensar que la respuesta es negativa, pero no es así. Lo que sucede es que, si bien el origen es el vértice de este paraboloide en cuestión, es un punto en el que la superficie tiene mayor suavidad que en el vértice del cono (se puede pensar en analogía por qué la función $f(x)=|x|$ no es derivable en $x=0$, en tanto $g(x)=x^2$ sí). Para ver esto, se considera una parametrización de esta superficie : $\Phi(u,v)=(u,v,u^2+v^2)$ con $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ y se calculan sus derivadas parciales y su vector normal:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u}(u,v)=(1,0,2u)\,,\ \frac{\partial\Phi}{\partial v}(u,v)=(0,1,2v)$$

y

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u}\times\frac{\partial\Phi}{\partial v}=(-2u,-2v,1)\neq(0,0,0)\,\forall(u,v)\in\mathbb{R}^2.$$

el normal es nunca nulo ya que la tercera coordenada es constantemente 1, lo cual hace a la parametrización suave en todo punto (y a la superficice también). De hecho $\frac{\partial\Phi}{\partial u}\times\frac{\partial\Phi}{\partial v}(0,0)=(0,0,1)$ y el plano tangente en ese punto es el plano $z=0$.

Otra parametrización posible es $\Phi:[0,\infty)\times[0,2\pi]$, $\Phi(r,\theta)=(r\cos\theta,r\operatorname{sen}\theta,r^2)$, que es la proveniente de las coordenadas cilíndricas expresando a $z=x^2+y^2=r^2$ en función de r. Los vectores de derivadas parciales

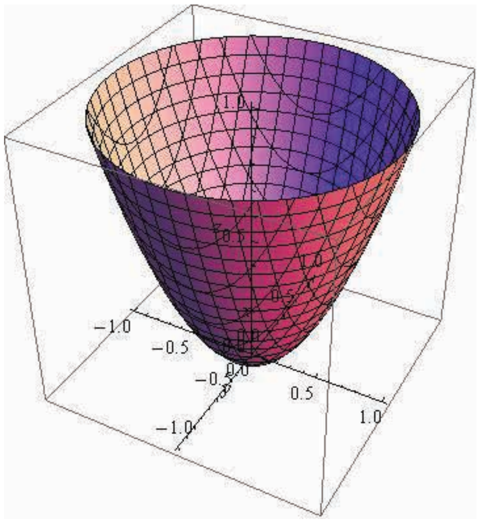
$$\frac{\partial\Phi}{\partial r}(r,\theta)=(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta,2r)\,,\ \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}(r,\theta)=(-r\operatorname{sen}\theta,r\cos\theta,0)$$

y

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r}\times\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}(r,\theta)=(-2r^2\cos\theta,-2r^2\operatorname{sen}\theta,r).$$

Se puede observar que $\Phi(r,\theta)=(0,0,0)\leftrightarrow r=0$ y θ puede ser cualquier valor entre 0 y 2π, de modo que Φ no es inyectiva en el $(0,0,0)$. Cuando esto ocurre $\frac{\partial\Phi}{\partial r}\times\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}(0,\theta)=(0,0,0)$ y no se puede hallar el plano tangente, pero en este caso no porque no haya sino porque la parametrización ahora elegida no es regular en el origen (con la parametrización anterior sí se podía hacer). Sin embargo, se sabe por la parametrización anterior que el paraboloide tiene plano tangente en el origen.

Figura 5.21: Paraboloide $x^2 + y^2 = z$



En este momento el lector podría preguntarse si el cambio de parametrización en una superficie da planos tangentes distintos en cada punto. Si bien los vectores de derivadas parciales pueden ser muy diferentes en cada parametrización, el plano tangente será el mismo (de hecho, para cada punto de la superficie es único), lo único que cambiará será la ecuación que la describe, debido a que, por ejemplo, se pueden elegir infinitos pares de direcciones linealmente independientes que lo generen. El problema se presenta si la parametrización elegida es o no regular en el punto en cuestión, dado que, de no serlo, no se puede construir la ecuación del plano tangente, sin embargo, eso no significa que no exista. Para subsanar este problema conviene siempre controlar que el gráfico de la superficie no tenga picos o cortes y también conviene verificar la inyectividad de la parametrización elegida en el punto a calcular al plano tangente. De estas dos cuestiones, la primera es una propiedad de la superficie en sí (la de tener o no picos o cortes bruscos) y la otra es de la representación elegida para la superficie (de la suavidad o no de la parametrización): la segunda puede solucionarse consiguiendo otra parametrización que no tenga dicho problema, sin embargo, la primera es infranqueable. De este modo, se puede decir que en el cono, el punto $(0, 0, 0)$ es singular y no existe plano tangente, en tanto en el paraboloide ese mismo punto sí es un valor regular.

Ejemplo 5.2.6. Calcular el plano tangente a la superficie S definida como

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$$

en los puntos

1) $(\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})$;

2) $(0, 0, 2)$.

No es difícil ver que S es la cáscara de la esfera con centro $(0, 0, 0)$ y radio 2.

1) Ya que se trata de la cáscara de una esfera maciza se puede considerar una parametrización que provenga del cambio de variables a coordenadas esféricas. Como solo interesa los puntos que estén a distancia 2 del origen, se puede fijar el radio ρ en 2 y con ello se obtiene una parametrización de S

$$\begin{cases} x &= 2\cos\theta \operatorname{sen}\phi \\ y &= 2\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \\ z &= 2\cos\phi \end{cases}, D = \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \phi \leq \pi. \end{cases}$$

Por lo tanto, si $\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, dada por

$$\Phi(\theta, \phi) = (x, y, z) = (2\cos\theta \operatorname{sen}\phi, 2\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, 2\cos\phi),$$

es parametrización de S, entonces $(\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}) \in Im(\Phi)$, o sea que deben existir $(\theta, \phi) \in D$ tales que

$$\Phi(\theta, \phi) = (\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos\theta \operatorname{sen}\phi &= \sqrt{2} \\ 2\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi &= 0 \\ 2\cos\phi &= -\sqrt{2}. \end{cases}$$

La última igualdad dice que $cos\phi = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \phi = \frac{3\pi}{4}$ o $\frac{5\pi}{4}$ pero como el rango de ϕ es de 0 a π, entonces $\phi = \frac{3\pi}{4}$. Entonces $\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \neq 0$, así que de la primera y segunda ecuación sale que $\cos\theta = 1$ y $\operatorname{sen}\theta = 0$, es decir $\theta = 0$. De modo que $\Phi(0, \frac{3\pi}{4}) = (\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})$. Ahora los vectores tangentes en el punto en cuestión son

$\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\left(0, \frac{3\pi}{4}\right) = (-2\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, 2\cos\theta \operatorname{sen}\phi, 0)|_{(0, \frac{3\pi}{4})} = (0, \sqrt{2}, 0)$,

$\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\left(0, \frac{3\pi}{4}\right) = (2\cos\theta\cos\phi, 2\operatorname{sen}\theta\cos\phi, -2\operatorname{sen}(\phi))|_{(0, \frac{3\pi}{4})} = (-\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})$.

Como se pudo ver, se tuvieron que utilizar los valores θ y ϕ hallados, dado que los vectores tangentes están expresados como funciones de dos variables, dado que son las derivadas parciales de la parametrización, que también es una función de dos variables. Con lo anterior, la ecuación paramétrica del plano tangente a S en $(\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})$ es:

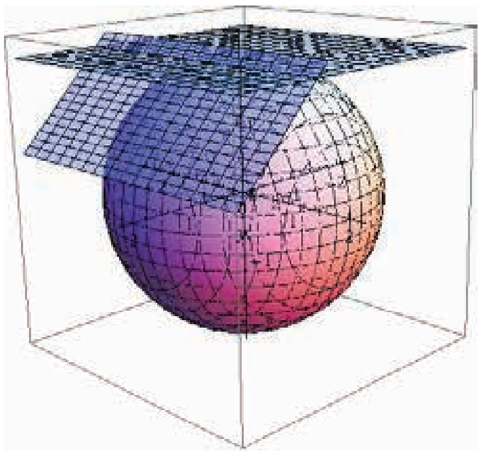
$$\pi_{(\sqrt{2},0,-\sqrt{2})} : X = \lambda(0, \sqrt{2}, 0) + \beta(-\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}) + (\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})\ \lambda, \beta \in \mathbb{R}.$$

2) Si se utiliza la misma parametrización,

$$\Phi(\theta, \phi) = (0, 0, 2) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos\theta \operatorname{sen}\phi &= 0 \\ 2\, sen\theta \operatorname{sen}\phi &= 0 \\ 2\cos\phi &= 2 \end{cases} \Leftrightarrow \phi = 0\,,\ \theta \in [0, 2\pi].$$

y nuevamente vuelve a aparecer un punto en el cual la parametrización usada no es inyectiva, de modo que no se podrá obtener la ecuación del plano tangente mediante esta parametrización (si el lector verifica, verá que nuevamente el vector normal da $(0,0,0)$). Pero de observar el gráfico, S sí es regular en ese punto (de hecho, en todos sus puntos). Más aún, a simple vista y pensando en la propiedad de aproximación puede afirmarse que el plano tangente tiene ecuación $z = 2$. Queda como ejercicio probar esta aseveración.

Figura 5.22: Planos tangentes de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ en $(\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})$ y en $(0,0,2)$



Ejercicio 5.2.7. Probar que el plano tangente al punto $(0,0,2)$ en la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ tiene ecuación $z = 2$.

Observación 5.2.8. En general para cualquier superficie esférica de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $a \in \mathbb{R}_{>0}$ fijo, si se parametriza con coordenadas esféricas, fijando el radio $\rho = a$, es decir

$$\Phi : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3,\ \Phi(\theta, \phi) = (a\cos\theta \operatorname{sen}\phi, a \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, a\cos\phi).$$

Sus vectores tangentes son

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = (-a \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, a\cos\theta \operatorname{sen}\phi, 0),$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} = (a\cos\theta\cos\phi, a\operatorname{sen}\theta\cos\phi, -a\operatorname{sen}\phi),$$

y su vector normal es

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right) \times \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \phi}\right) &= (-a^2 \cos\theta \operatorname{sen}^2\phi, -a^2 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}^2\phi, \\ &\quad -a^2 \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}\phi \cos\phi - a^2 \cos^2\theta \operatorname{sen}\phi \cos\phi) \\ &= (-a^2 \cos\theta \operatorname{sen}^2\phi, -a^2 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}^2\phi, \\ &\quad -a^2 \operatorname{sen}\phi \cos\phi(\operatorname{sen}^2\phi + \cos^2\phi)) \\ &= (-a^2 \cos\theta \operatorname{sen}^2\phi, -a^2 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}^2\phi, -a^2 \operatorname{sen}\phi \cos\phi)\end{aligned}$$

como en cada componente hay un "$a \operatorname{sen}\phi$", si se lo extrae queda

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right) \times \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \phi}\right) &= -a \operatorname{sen}\phi\,(a\cos\theta \operatorname{sen}\phi, -a \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, -a\cos\phi) \\ &= -a \operatorname{sen}\phi\, \Phi(\theta, \phi).\end{aligned}$$

Entonces, su norma será:

$$\left\| \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right) \times \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \phi}\right) \right\| = \left\| \underbrace{-a \operatorname{sen}\phi}_{\in \mathbb{R}}\ \underbrace{\Phi(\theta, \phi)}_{\in \mathbb{R}^n} \right\| = \left| -a \operatorname{sen}\phi \right| . \left\| \Phi(\theta, \phi) \right\| .$$

Como $0 \leq \phi \leq \pi$, se tiene que $\operatorname{sen}\phi \geq 0$. Por otro lado,

$$\begin{aligned}\|\Phi(\theta,\phi)\| &= \sqrt{(a\cos\theta \operatorname{sen}\phi)^2 + (a \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi)^2 + (a\cos\phi)^2} \\ &= \sqrt{a^2\left[\cos^2\theta \operatorname{sen}^2\phi + \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}^2\phi + \cos^2\phi\right]} \\ &= \sqrt{a^2\left[\operatorname{sen}^2\phi\,(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) + \cos^2\phi\right]}. \\ &= \sqrt{a^2\left[\operatorname{sen}^{\phi} + \cos^2\phi\right]} = \sqrt{a^2} = a.\end{aligned}$$

Entonces,

$$\left\| \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right) \times \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \phi}\right) \right\| = a^2 \operatorname{sen}\phi.$$

Esto de que $\|\Phi(\theta,\phi)\| = a$ resulta lógico, ya que es la parametrización de la esfera y ésta tiene radio fijo a y todos los puntos de dicha esfera se encuentran a una distancia a del origen (centro de esa esfera en este caso, pero puede pensarse con esferas con otros centros).

En el ejemplo 5.1.13 mostramos dos posibles parametrizaciones para la superficie frontera del paralelepípedo $[0,1] \times [1,2] \times [2,3]$. Lo que pudimos observar es que esta superficie era regular en cada una de las caras que la componían, no siendo así en sus aristas. Pero las aristas, como segmentos, son regiones de área nula. Entonces, podemos decir que esta superficie es regular en casi todo punto o regular a trozos. En general, esto sucede con la mayoría de las superficies cerradas. En el caso del cono, existe un único punto no regular, que es el vértice, y se sabe que un punto es también una región de área nula.

5.2.3. Área de una superficie paramétrica

Sea S una superficie regular parametrizada por una función $\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$. En la sección anterior vimos que la norma del vector $\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}$ puede interpretarse como un factor de proporcionalidad entre las áreas del rectángulo de lados Δu, Δv y el paralelogramo imagen de ese rectángulo sobre S. Pudimos ver que el área de dicho paralelogramo era $\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| .\Delta u.\Delta v.$ Si se particiona a D en rectángulos Δu, Δv y se hace tender esas longitudes a 0 se tendrá el siguiente resultado:

Definición 5.2.9. *El **área de la superficie** S, dada una parametrización $\Phi : D \to S$ es*

$$A(S) = \iint_D \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| dudv. \tag{5.2.3}$$

Como la definición de área está hecha en base a una parametrización de la superficie en cuestión, podríamos pensar que el área depende efectivamente de la parametrización que se elija. Pero, por suerte, esto no sucede y el área es invariante respecto de cambios de representación (de parametrización). Tenemos, entonces, la siguiente propiedad.

Proposición 5.2.10. *Sea S una superficie regular en casi todo punto (salvo, quizás, en una región de área nula) y sean $\Phi : D \to S$ y $\Psi^*_D \to S$, dos parametrizaciones distintas de S. Entonces,*

$$A(S) = \iint_D \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| dudv = \iint_D^* \left\| \frac{\partial \Psi}{\partial u} \times \frac{\partial \Psi}{\partial v} \right\| dudv.$$

En lo siguiente haremos mención a las superficies regulares en casi todo punto llamándolas solamente "superficies". Se puede aplicar la definición 5.2.3 para calcular áreas en los ejemplos siguientes.

Ejemplo 5.2.11. Calcular el área de la superficie S, definida como

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \, x^2 + (z-1)^2 \leq 4, y = 4 \right\}.$$

En primer lugar, por la definición de área, se necesita hallar alguna parametrización de la superficie en cuestión, para luego calcularle los vectores tangente y el producto cruz de los mismos (ver ecuación 5.2.3). Como y es constantemente 4, se puede deducir que la superficie es plana y la desigualdad $x^2 + (z-1)^2 \leq 4$ es la restricción en ese plano, marca una porción de él. En efecto $x^2 + (z-1)^2 \leq 4$ en el plano xz es un disco de radio 2 y centro $(0, 1)$. De modo que en $\mathbb{R}^3$ será S un disco de radio 2 y centro $(0, 4, 1)$. Una parametrización de este disco puede provenir de las variables polares:

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= 4 \\ z-1 &= r \operatorname{sen}\theta \end{cases}, \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} \Phi : D \to S, \\ \Phi(r, \theta) = (r\cos\theta, 4, r\operatorname{sen}\theta + 1). \end{array}$$

Con esta parametrización el área se calcula por (5.2.3)

$$A(S) = \iint_D \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial r} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right\| drd\theta.$$

Como

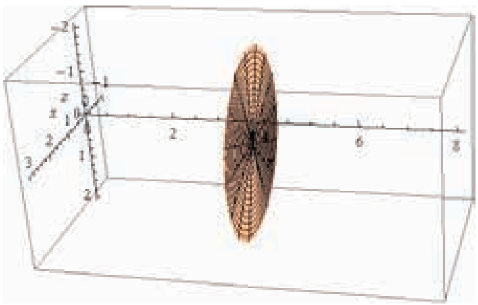
$$\begin{cases} \Phi_r &= (\cos\theta, 0, \operatorname{sen}\theta) \\ \Phi_\theta &= (-r\operatorname{sen}\theta, 0, r\cos\theta) \end{cases} \Rightarrow \|\Phi_r \times \Phi_\theta\| = \|(0,-r,0)\| \underbrace{=}_{r\geq 0} r,$$

entonces,

$$\mathsf{A}(S) = \int_0^2 \int_0^{2\pi} r\, d\theta dr = 2\pi \left. \frac{r^2}{2} \right|_0^2 = 4\pi$$

y el área es efectivamente el área correspondiente a un disco de radio 2.

Figura 5.23: Superficie $x^2 + (z-1)^2 \leq 4, y = 4$



Ejemplo 5.2.12. Calcular el área de la superficie S definida por

$$S = \left\{(x,y,z) : \; y^2 + z^2 \leq 1\,, x + y = 2\right\}.$$

Esta superficie es la intersección del cilindro $y^2 + z^2 \leq 1$ con el plano $x + y = 2$, que no lo corta perpendicularmente, por lo tanto S es una elipse en ese plano (ver figura 5.24). Una parametrización posible puede surgir directamente de considerar que $x = 2 - y$ y que y, z deben cumplir que $y^2 + z^2 \leq 1$, entonces

$$\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3\,, \Phi(y,z) = (2-y, y, z),$$

con $D = \begin{cases} -1 \leq y \leq 1 \\ -\sqrt{1-y^2} \leq z \leq \sqrt{1-y^2} \end{cases}$ (D es el disco unitario en el plano yz). Entonces, el área de S se calcula como

$$A(S) = \iint_S 1\, dS = \iint_D \|\Phi_y \times \Phi_z\|\; dydz.$$

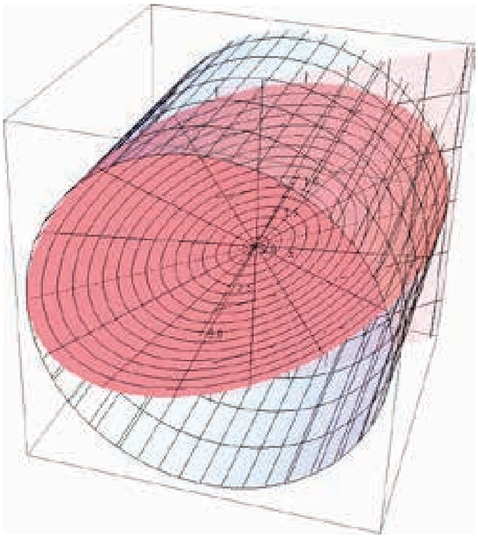
Si

$$\begin{cases} \Phi_y &= (-1, 1, 0) \\ \Phi_z &= (0, 0, 1) \end{cases} \Rightarrow \|\Phi_y \times \Phi_z\| = \|(1,1,0)\| = \sqrt{2},$$

entonces,

$$A(S) = \iint_D \sqrt{2}\, dydz = \sqrt{2}.A(D) = \sqrt{2}\pi.$$

Figura 5.24: Superficie $y^2 + z^2 \leq 1\,, x + y = 2$



Ejemplo 5.2.13. Determinar el área de la superficie definida por las condiciones $x^2+y^2+z^2 = 1$ e $y \leq 0$.

Esta superficie corresponde a una mitad de la esfera unitaria hueca con centro en el origen, aquella que verifica la condición $y \leq 0$ (ver figura 5.25). Se puede parametrizar fácilmente usando las coordenadas esféricas fijando $\rho = 1$

$$\Phi : D \to \mathbb{R}^3,\ \Phi(\theta, \phi) = (\cos\theta \operatorname{sen}\phi, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \cos\phi),$$

con

$$D = \begin{cases} \pi \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \phi \leq \pi. \end{cases}$$

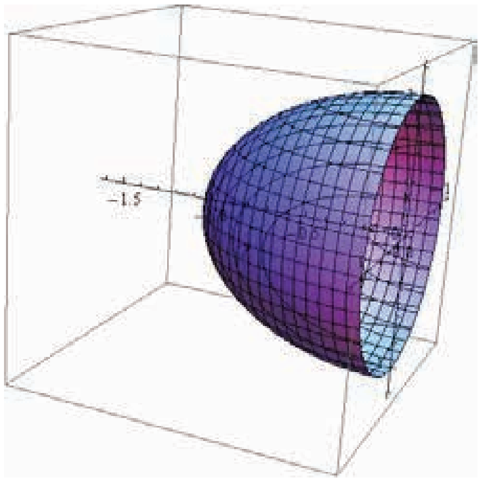
Teniendo en cuenta la observación 5.2.8, sigue que

$$\|\Phi_\theta \times \Phi_\phi\| = \operatorname{sen}\phi,$$

así que el área se calcula como

$$A(S) = \int_0^\pi \int_\pi^{2\pi} \operatorname{sen}\phi \, d\theta d\phi = \int_0^\pi \pi \operatorname{sen}\phi \, d\phi = 2\pi.$$

Figura 5.25: Superficie definida por $x^2 + y^2 + z^2 = 1\,, y \leq 0$



Ejemplo 5.2.14. Calcular el área de la superficie frontera del sólido W, definido como:

$$W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \, x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}, z \geq 0\right\}$$

Este sólido está acotado inferiormente por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y superiormente por el cono $z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$, dado que $z \leq \sqrt{z} \leftrightarrow 0 \leq z \leq 1$. De modo que la superficie frontera es la unión de las superficies

$$\begin{aligned} S_1 &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \, x^2 + y^2 = z \leq 1\right\}, \\ S_2 &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \, \sqrt{x^2 + y^2} = z \leq 1\right\}, \end{aligned}$$

que son el paraboloide y el cono, respectivamente. Entonces, el área de la superficie frontera será la suma de las dos áreas:

$$A(\delta W) = A(S_1) + A(S_2).$$

Se calcula cada una por separado:

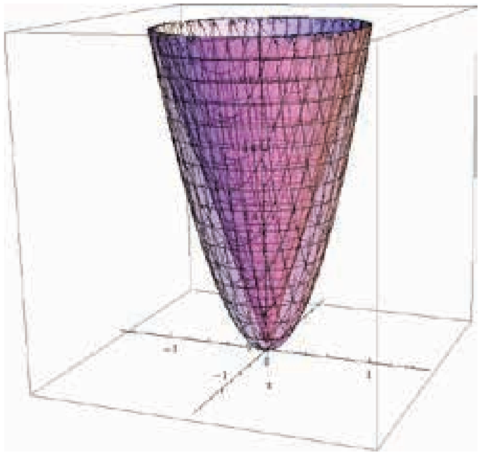
1) A S_1 la podemos parametrizar con

$$\Phi_1 : D \to \mathbb{R}^3\,,\ \Phi(x, y) = (x, y, x^2 + y^2),$$
$$D = \left\{(x, y) : \, x^2 + y^2 \leq 1\right\}.$$

De modo que

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_x = (1, 0, 2x) \\ \Phi_y = (0, 1, 2y) \end{array} \right. \Rightarrow \|\Phi_x \times \Phi_y\| = \|(-2x, -2y, 1)\| = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}.$$

Figura 5.26: Superficie frontera de
$W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2+y^2 \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2}, z \geq 0\right\}$



Por lo tanto,

$$A(S_1) = \iint_D \sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,dxdy.$$

Como lo que quedó es una integral doble sobre un disco D de $\mathbb{R}^2$, se puede hacer un cambio de variables (pero es preciso poner atención, ya que se puede hacer porque ya no se trata de una integral de superficie) mediante coordenadas polares

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \end{cases}, \begin{cases} 0 & \leq r \leq 1 \\ 0 & \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \mathsf{A}(S_1) &= \iint_D \sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,dxdy \underbrace{=}_{\mathsf{TCV}} \int_0^{2\pi}\int_0^1 r.\sqrt{1+4r^2}\,drd\theta \\ &= 2\pi.\frac{2}{3}\left[\left(1+4r^2\right)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{4\pi}{3}\left[5^{3/2}-1\right]. \end{aligned}$$

2) A S_2 se la puede parametrizar con

$$\Psi : D \to \mathbb{R}^3\,,\; \Psi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, r)$$

$$D = \begin{cases} 0 & \leq r \leq 1 \\ 0 & \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

De modo que,

$$\left\{\begin{array}{ll}\Psi_r & = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 1)\\ \Psi_\theta & = (-r\operatorname{sen}\theta, r\cos\theta, 0)\end{array}\right. \Rightarrow \|\Phi_r \times \Phi_\theta\| \quad = \quad \|(-r\cos\theta, -r\operatorname{sen}\theta, r)\|$$

$$\underbrace{=}_{r\geq 0} \quad r\sqrt{2}.$$

Por lo tanto,

$$A(S_2) = \iint_D r\sqrt{2}\, drd\theta = \sqrt{2}\pi.$$

Finalmente, queda que

$$A(\delta W) = \frac{4\pi}{3}.\left[5^{3/2} - 1\right] + \sqrt{2}\pi.$$

5.2.4. Práctica

1) Parametrizar las siguientes superficies. Realizar un gráfico aproximado y determinar cuáles son superficies cerradas.

a) $z = 2$, con $0 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 1$

b) $x + z = 6$, con $-1 \leq y \leq 0; x, z \geq 0$

c) $x + 3y + z = 2$, en el 1er octante

d) $x^2 + z^2 = 1$, con $z \geq 0$ y $-3 \leq y \leq 1$

e) $x^2 + y^2 + z^2 = 6$, en el 1er octante

f) $(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 4$

g) $y = \sqrt{x^2 + z^2}$, con $y \leq 4$

h) $z = x^2$, con $x^2 + y^2 \leq 1$

i) $z + 2 = x^2 + y^2$, con $z \leq 3$

j) $y^2 + 4z^2 = 4$, con $-2 \leq x \leq 3$

k) La superficie frontera del sólido definido por $z \leq 5 - x^2 - y^2$ y $z \geq 0$

2) Para las superficies de los ejercicios 1 y 2 que se indican hallar, si es posible, los planos tangentes y vectores normales en los puntos P señalados.

(I) en $P = (1, 0, 2)$, (IV) en $P = (0, -1, 1)$, (V) en $P = (0, 0, \sqrt{6})$, (VII) en $P = (1, 1, \sqrt{2})$,

5.3. Integrales sobre superficies de funciones escalares

Al definir integral de trayectoria en el capítulo 4 tomamos como referencia inicial lo hecho previamente para la longitud de arco. En analogía con esto, la definición de área de una superficie S hecha en (5.2.3) podría motivar la definición de integrales sobre superficie de campos escalares. Esto es porque puede interpretarse que el área de S es una integral sobre dicha superficie de la función escalar $f(x, y, z) = 1$. De este modo, se puede realizar la siguiente definición.

Definición 5.3.1. *Sea S una superficie paramétrica imagen de $\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ diferenciable, y sea f un campo escalar definido y acotado en S. La **integral de superficie** de $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ **sobre** S es*

$$\iint_S f\, dS = \iint_D f(\Phi(u, v)) \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| dudv. \tag{5.3.1}$$

Esta definición asegura que una integral sobre una superficie parametrizable S es igual a una integral doble sobre el dominio de una parametrización de S. Se puede notar que, si $f(x, y, z) = 1$, se tiene la definición de área de la ecuación (5.2.3):

$$A(S) = \iint_S 1\, dS = \iint_S \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| dudv.$$

El siguiente teorema exhibe algunas de las propiedades básicas que cumplen las integrales de superficie sombre campos escalares.

Teorema 5.3.2. *Sean f y g campos escalares, S superficie regular. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

1) *Linealidad:*

$$\iint_S a.f + b.g\, dS = a \iint_S f\, dS + b \iint_S g\, dS,$$

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R}.$$

2) *Aditividad: Si $S = S_1 \cup S_2$ con S_1 y S_2 no solapadas, es decir que a lo sumo tienen como intersección una curva, y regulares (S se dice regular a trozos),*

$$\iint_S f\, dS = \iint_{S_1} f\, dS + \iint_{S_2} f\, dS.$$

Las aplicaciones físicas de este tipo de integrales son múltiples, abarcando desde el cálculo del área superficial hasta el cálculo de un centro de gravedad y momento de inercia.

Ejemplo 5.3.3. Sea $S = \left\{(x, y, z) : z = 4 - y^2\, ,\ z \geq 1\, , -2 \leq x \leq 2\right\}$. Calcular $\iint_S xy\, dS$. La condición $z = 4 - y^2$ corresponde a una parábola para cada $x \in [-2, 2]$, de modo que es un cilindro parabólico, bien llamado canaleta. La condición $z \geq 1$ permite que sea una superficie acotada y su gráfico es el de la figura 5.27. Para calcular $\iint_S xy\, dS$, por definición según

la ecuación (5.3.1), se necesita una parametrización de la superficie S. Para ello, se puede observar que

$$\begin{cases} z & = 4 - y^2 \wedge z \geq 1 \Rightarrow 4 - y^2 \geq 1 \Rightarrow 3 \geq y^2 \Rightarrow -\sqrt{3} \leq y \leq \sqrt{3} \\ -2 & \leq x \leq 2. \end{cases}$$

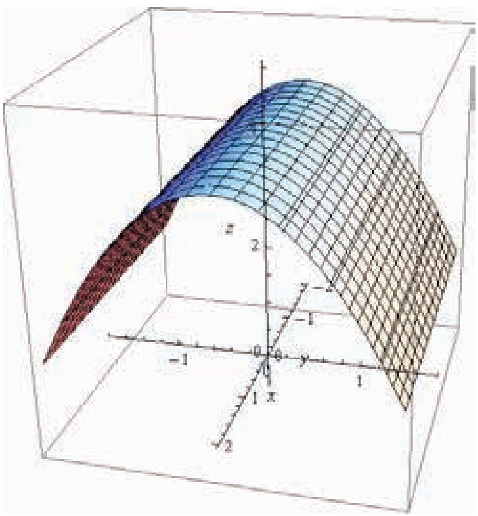
entonces $\Phi(x, y) = (x, y, 4 - y^2)$ resulta parametrización de S si

$$\begin{cases} -\sqrt{3} \leq y \leq \sqrt{3} \\ -2 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \iint_S xy\, dS &= \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} xy.\underbrace{\|\Phi_x \times \Phi_y\|}_{=\sqrt{4y^2+1}} dydx = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} xy.\sqrt{4y^2+1}dydx \\ &= \int_{-2}^{2} \frac{x}{12} \left[\left(4y^2+1\right)^{3/2} \right]_{y=-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx = 0. \end{aligned}$$

Figura 5.27: Superficie $S = \{(x, y, z) : z = 4 - y^2\,,\ z \geq 1\,, -2 \leq x \leq 2\}$



Ejemplo 5.3.4. Sea S la superficie imagen de la función $\psi : [0, 4] \times [0, 4] \to \mathbb{R}^3$, definida por $\psi(u, v) = (u + v, u - v, u^2 - v^2)$. Si $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$, calcular $\iint_S f\, dS$.

$S = \text{Im}(\psi)$, o sea que ψ es una parametrización de S. En este caso, puede ser algo engorroso si se intenta a graficar esta superficie. Además, todo lo que se necesita para calcular la

integral está dado, por lo cual

$$\iint_S f\,dS = \int_0^4 \int_0^4 \sqrt{x^2+y^2+1}.\,\|\psi_u \times \psi_v\|\,dudv.$$

Como

$$\left\{\begin{array}{ll}\psi_u & =(1,1,2u)\\ \psi_v & =(1,-1,-2v)\end{array}\right. \Rightarrow \|\Phi_u \times \Phi_v\| \begin{array}{l} = \|(-2v+2u, 2u+2v, -2)\| \\ = 2\sqrt{2u^2+2v^2+1},\end{array}$$

entonces,

$$\begin{aligned}\iint_S f\,dS &= \int_0^4 \int_0^4 \sqrt{(u+v)^2+(u-v)^2+1}.\,2\sqrt{2u^2+2v^2+1}dudv\\ &= \int_0^4 \int_0^4 2\left[\sqrt{2u^2+2v^2+1}\right]^2 dudv\\ &= 2\int_0^4 \int_0^4 (2u^2+2v^2+1)dudv\\ &= \frac{2144}{3}.\end{aligned}$$

Queda como ejercicio para el lector comprobar este resultado (se le sugiere verificar que esté bien calculada la integral).

Ejemplo 5.3.5. Ahora se considera la superficie S del ejemplo 5.2.14, que era una superficie compuesta por dos superficies simples, el cono y el paraboloide, que no se superponen, salvo en la curva $x^2+y^2=1$ con $z=1$, que es el borde de ambas (pero es una región de contenido nulo). Si se tiene una función escalar f definida sobre estas superficies, entonces por aditividad se cumplirá que

$$\iint_S f\,dS = \iint_{S_1} f\,dS + \iint_{S_2} f\,dS.$$

Ejercicio 5.3.6. Calcular

$$\iint_S f\,dS = \iint_{S_1} f\,dS + \iint_{S_2} f\,dS,$$

con S_1, S_2 del ejemplo 5.2.14 y f como la del ejemplo 5.3.4.

5.3.1. Práctica

Integrar los siguientes campos escalares sobre las superficies indicadas.

1) $f(x,y,z)=x^2+y^2$, sobre la esfera $x^2+y^2+z^2=2$.

2) $f(x,y,z)=z$ sobre $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ z=2-x^2-y^2, z\geq 0\}$.

3) $f(x,y,z)=y^2$, sobre el cilindro $x^2+y^2=7, -2\leq z\leq 1$.

4) $f(x,y,z)=y^2$, sobre la superficie frontera del sólido definido por $x^2+y^2\leq 7$, $-2\leq z\leq 1$.

5.4. Integrales sobre superficies de funciones vectoriales

5.4.1. Superficies orientables y cambio de representación paramétrica

Ya vimos en la primera sección de este capítulo que, para cada punto de una superficie, existe una dirección que es perpendicular a la superficie y que pasa por dicho punto. Al vector unitario de esa dirección se lo denomina *vector normal* y su existencia es independiente de cualquier parametrización (es decir, existe sin necesidad de parametrizar la superficie). Además, dicho vector normal unitario no es único (ya que, dada una dirección, existen dos posibles sentidos).

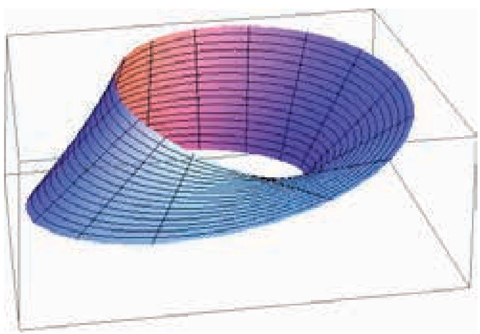
Definición 5.4.1. *Una superficie S se dice* ***orientable*** *si, al recorrerla regularmente, la orientación de los vectores normales es siempre la misma.*

Siempre que se piense en vectores normales se los piensa anclados en el punto de la superficie, pero cuando se los describe de la forma (n_1, n_2, n_3), esta forma los concibe con su origen en el $(0, 0, 0)$.

Los vectores normales a una superficie en cada punto tienen dos posibles sentidos únicamente. Una superficie orientable conservará alguno de los sentidos siempre. Un ejemplo de superficie que no es orientable es la denominada "cinta de Möebius" (ver figura 5.28), ya que si se camina por ella saliendo de un punto, al recorrer y volver al mismo sucede que se llega desde el otro lado de la superficie.

Una superficie orientable debe cumplir que tenga lo que comúnmente se denominarían "dos lados", que en el caso de la cinta de Möebius no existen.

Figura 5.28: Cinta de Möebius

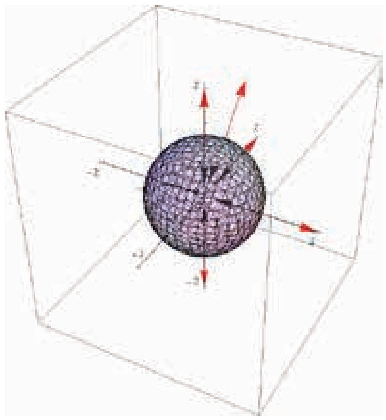


En el transcurso de este y los siguientes capítulos trabajaremos únicamente con superficies orientables, de modo que en todos los casos podamos determinar su orientación a través de sus vectores normales. Convendría en este momento presentar algunos ejemplos de orientaciones.

1) En el caso de la esfera unitaria de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, existen dos orientaciones posibles de los vectores normales: por un lado, cuando los vectores apuntan hacia

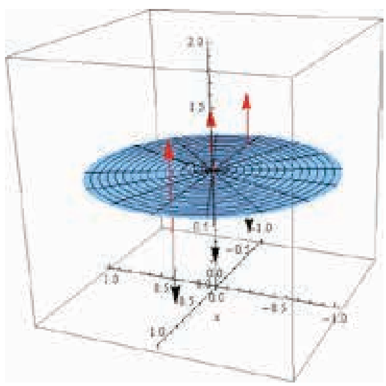
el origen o centro de la esfera, en tanto que la otra orientación posible es aquella en la que todos los vectores normales apuntan hacia "afuera" de la esfera (ver la figura 5.29).

Figura 5.29: Orientaciones posibles en la esfera



2) En el caso de un disco o de una porción en el plano xy existen dos posibilidades: que apunten hacia "arriba", es decir que el vector normal tenga tercera coordenada positiva (al decir esto siempre se tiene en cuenta al vector normal anclado en el origen), o que apunten hacia abajo (tercera coordenada negativa). En ambos casos se trata de vectores constantes con primera y segunda coordenada nula (ver la figura 5.30).

Figura 5.30: Orientaciones posibles del disco

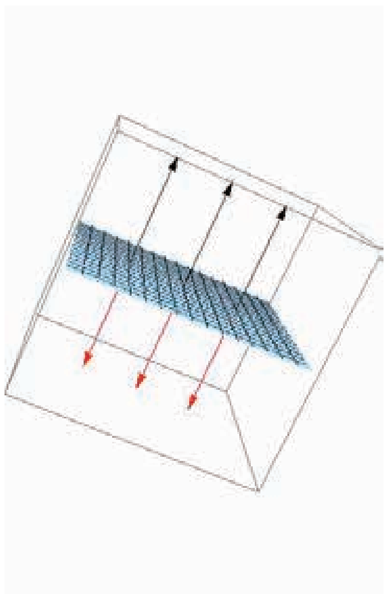


3) Cuando se trata de una superficie porción de algún plano de ecuación $ax+by+cz=d$, $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, el vector normal tiene igual longitud y dirección para todo punto de la superficie, o sea que es constante. Lo único que cambia es su sentido, según se tenga una u otra orientación. Como el vector normal del plano es $n=(a,b,c)$, el de norma 1 es $\frac{n}{\|n\|}$. Se pueden ver las orientaciones en la figura 5.31.

4) En el caso del paraboloide $z=x^2+y^2$, las orientaciones también son dos: una es la que cumple que sus normales apuntan hacia el eje de simetría, o mejor dicho, que tienen tercera coordenada positiva, y la otra es la que los normales tienen tercera coordenada negativa. En este caso, el vector normal cambia de dirección en cada punto, pero siempre cumple una de las dos condiciones, incluso en el vértice del paraboloide (ver la figura 5.32).

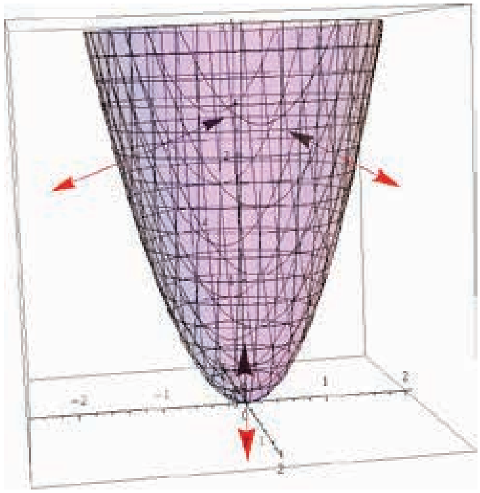
5) Más en general, si una superficie es orientable y conexa, solo hay dos orientaciones posibles.

Figura 5.31: Orientaciones posibles del plano $ax+by+cz=d$



Como vimos en la primera sección de este capítulo (ya visto en el caso del cono y de un plano, por ejemplo), una superficie S puede tener muchas parametrizaciones. Cada parametrización tiene el producto vectorial fundamental, que actúa como vector normal. Ese producto vectorial puede no tener norma 1 pero siempre tiene la misma dirección que el vector normal a

Figura 5.32: Orientaciones posibles del paraboloide $z = x^2 + y^2$



la superficie. El sentido de este vector producto fundamental marcará si la parametrización recorre la superficie preservando (o no) el sentido de la misma. Se ilustra esta idea en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.4.2. Si se tiene al paraboloide $z = x^2 + y^2$ orientado con normales con tercera coordenada positiva y se piensa en la parametrización $\Phi(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$ con (x, y) en el disco unitario de $\mathbb{R}^2$, se tiene que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} = det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial (x^2+y^2)}{\partial x} \\ \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial y}{\partial y} & \frac{\partial (x^2+y^2)}{\partial v} \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{pmatrix} = (-2x, -2y, 1).$$

Como la tercera coordenada de $\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ es 1 y es positiva siempre, entonces esta parametrización preserva la orientación de la superficie.

Sin embargo, si se considera la parametrización

$$\Psi : D \to \mathbb{R}^3 \,,\ \Psi(x, y) = (r \operatorname{sen} \theta, r \cos \theta, r^2)$$

$$D = \begin{cases} 0 \leq r < \infty \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi, \end{cases}$$

de modo que:

$$\begin{cases} \Psi_r &= (\operatorname{sen} \theta, \cos \theta, 2r) \\ \Psi_\theta &= (r \cos \theta, -r \operatorname{sen} \theta, 0) \end{cases} \Rightarrow \Psi_r \times \Psi_\theta = (2r^2 \operatorname{sen} \theta, 2r^2 \cos \theta, -r)$$

y como $r \geq 0$ se tiene que Ψ invierte orientación de S, dado que tiene el vector normal con tercera coordenada siempre negativa.

5.4.2. Integrales de superficie

Así como definimos previamente integrales sobre campos escalares, se puede definir sobre funciones vectoriales.

Definición 5.4.3. *Sean S, una superficie regular y orientable, y $F : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una función. Definimos la **integral sobre S de F** como*

$$\iint_S F.dS = \iint_S F.N\, dS,$$

con N un vector normal a S de norma 1 y S orientada.

Podemos observar que el producto escalar $F.N$ da una función escalar, así que la integral sobre campos vectoriales se define luego por medio de lo definido en las secciones anteriores de integrales sobre campos escalares. El problema de esta definición radica en la dificultad de determinar el vector N, por lo cual se plantea la siguiente definición, de mayor utilidad.

Definición 5.4.4. *Sean S, una superficie regular y orientada, y $F : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una función. Si $\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es parametrización regular de S que preserva su orientación, se define la **integral de F sobre S***

$$\iint_S F.dS = \iint_D F(\Phi(u, v)). \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right) dudv.$$

En esta segunda definición, que es mucho más operativa que la primera, se calcula una integral de superficie a través de una integral doble sobre el dominio de la parametrización.

A continuación presentamos dos observaciones importantes.

Observación 5.4.5. (Independencia de la parametrización) Si $\Phi : D_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $\Psi : D_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ son dos parametrizaciones regulares de una superficie S orientada que preservan su orientación, entonces,

$$\begin{aligned} \iint_S F.dS &= \iint_{D_1} F(\Phi(u, v)). \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right) dudv \\ &= \iint_{D_2} F(\Psi(u, v)). \left(\frac{\partial \Psi}{\partial u} \times \frac{\partial \Psi}{\partial v}\right) dudv. \end{aligned}$$

Es decir, que la integral no depende de la parametrización elegida.

Análogamente a lo que sucede con curvas, si se integra sobre campos escalares, no importa la orientación de la superficie y tampoco importa si la parametrización preserva o no dicha orientación. Pero cuando se trata de integración sobre campos vectoriales, la orientación se torna crucial. Afortunadamente, la diferencia entre orientaciones estará dada solo por un signo, como se muestra en la observación siguiente.

Observación 5.4.6. (Independencia relativa de la parametrización) Si $\Phi : D_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $\Psi : D_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ son dos parametrizaciones regulares de una superficie S orientada tales que Φ preserva su orientación pero Ψ la invierte, entonces,

$$\underbrace{\iint_{D_1} F(\Phi(u,v)).\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right) dudv}_{=\iint_S F.dS} = -\underbrace{\iint_{D_2} F(\Psi(u,v)).\left(\frac{\partial \Psi}{\partial u} \times \frac{\partial \Psi}{\partial v}\right) dudv}_{=\iint_{S^{op}} F.dS}$$

$$\Rightarrow \iint_S F.dS = -\iint_{S^{op}} F.dS.$$

En este texto no probaremos estos hechos. El lector puede encontrar demostraciones y profundizaciones de estos hechos en Apostol, 2002 [2] y Marsden y Tromba, 1991 [6].

Aquí enunciamos algunas de las propiedades que cumplen las integrales de superficie sobre campos escalares.

Teorema 5.4.7. *Sean F y G campos vectoriales, S superficie regular. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

1) *Linealidad:*

$$\iint_S (a.F + b.G).dS = a\iint_S F.dS + b\iint_S G.dS;$$
$$\forall\, a, b \in \mathbb{R}$$

2) *Aditividad: Si $S = S_1 \cup S_2$ con S_1 y S_2 no solapadas y regulares ,*

$$\iint_S F.dS = \iint_{S_1} F.dS + \iint_{S_2} F.dS.$$

Con todo lo anterior podemos abordar algunos ejemplos.

Ejemplo 5.4.8. Sea S la superficie determinada por $x^2 + z^2 \leq 4, y + z = 2$, orientada de modo que las normales apunten hacia la derecha vistas desde el eje positivo de las x. Calcular $\iint_S (xy, z, x).dS$.

En este caso se trata de una elipse plana, dado que es una superficie que se encuentra en el plano $y + z = 2$ y que tiene sombra en el plano $y = 0$ al disco de radio 2 y centro en el origen (o bien, se puede pensar como el corte plano e inclinado de un cilindro macizo). En la figura 5.33 se marcan también los vectores normales a modo de ilustrar la orientación de la superficie. Se puede advertir que los normales tienen la misma dirección y sentido para todo punto (es la misma dirección que el vector perpendicular al plano $y + z = 2$), y que siempre la tercera componente del vector es positiva.

Como $y = 2 - z$ y la sombra en el plano xz es un disco, una parametrización posible es

$$\Phi(r, \theta) = (r\cos\theta, 2 - r\operatorname{sen}\theta, r\operatorname{sen}\theta)$$

con

$$D = \begin{cases} 0 & \leq r \leq 2 \\ 0 & \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

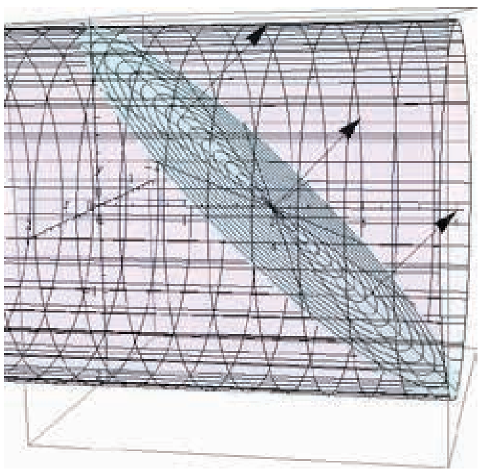
Hay que fijarse si Φ preserva orientación de S:

$$\left\{\begin{array}{ll}\Phi_r & = (\cos\theta, -\operatorname{sen}\theta, \operatorname{sen}\theta) \\ \Psi_\theta & = (-r\operatorname{sen}\theta, -r\cos\theta, r\cos\theta)\end{array}\right. \Rightarrow \Phi_r \times \Phi_\theta = (0, -r, \underbrace{-r}_{\leq 0}) \Rightarrow \ \Phi \text{ no preserva.}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\iint_S F.dS &= -\int_0^2\int_0^{2\pi} (r^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta, 2 - r\operatorname{sen}\theta, r\cos\theta).(0,r,r)\, d\theta dr \\ &= -\int_0^2\int_0^{2\pi} 2r - r^2\operatorname{sen}\theta + r^2\cos\theta\, d\theta dr = -\int_0^2\int_0^{2\pi} 2r\, d\theta dr \\ &= -\left[2\pi.r^2\right]_0^2 = -8\pi.\end{aligned}$$

Figura 5.33: Superficie orientada determinada por $x^2 + z^2 \leq 4$, $y + z = 2$



Definición 5.4.9. *El **flujo de un campo vectorial** es una magnitud escalar que se define como la integral del campo vectorial sobre una superficie orientada. Esto es*

$$\text{Flujo de F a traves de S} = \iint_{\text{S}} \text{F.dS.}$$

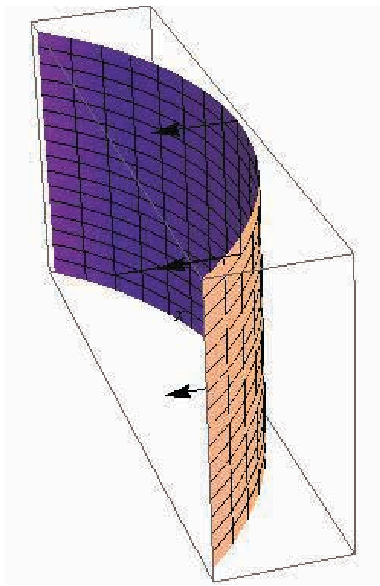
Ejemplo 5.4.10. Calcular el flujo de $F(x,y,z) = (0, 0, e^{\operatorname{sen}(xy)})$ sobre

$$S = \left\{(x,y,z):\ x^2 + y^2 = 9\,,\ |x| \leq y\,, -1 \leq z \leq 1\right\},$$

orientada con normales apuntando hacia el origen.

Por la definición anterior, el flujo está dado por la integral de F sobre la superficie S, así que hay que pensar de modo similar a lo hecho con anterioridad. En este caso, la superficie se trata de una porción del cilindro circular $x^2 + y^2 = 9$ con $-1 \leq z \leq 1$. La condición $|x| \leq y$ es equivalente a $-y \leq x \leq y$ y es una restricción para la superficie. Con esto, queda un cuarto de cilindro (ver figura 5.34).

Figura 5.34: Superficie
$S = \{(x, y, z) : \, x^2 + y^2 = 9 \, , \, |x| \leq y \, , -1 \leq z \leq 1\}$



Como z es variable y el radio $r = 3$ del cilindro es fijo respecto de su eje de simetría (que es el eje z), se puede pensar en la siguiente parametrización:

$$\Phi(\theta, z) = (3\cos\theta, 3\operatorname{sen}\theta, z),$$

con

$$D = \begin{cases} -1 & \leq z \leq 1 \\ \dfrac{\pi}{4} & \leq \theta \leq \dfrac{3\pi}{4}. \end{cases}$$

Hay que fijarse si Φ preserva la orientación de S:

$$\begin{cases} \Psi_\theta & = (-3\operatorname{sen}\theta, 3\cos\theta, 0) \\ \Phi_z & = (0,0,1) \end{cases} \Rightarrow \Phi_\theta \times \Phi_z = (3\cos\theta, 3\operatorname{sen}\theta, 0).$$

Si se toma cualquier punto de la superficie tal que $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ (por ejemplo, $\Phi\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{1}{2}\right) = \left(0, 1, \dfrac{1}{2}\right)$) se tiene que $\Phi_\theta \times \Phi_z\left(\dfrac{\pi}{2}, z\right) = (0, 3, 0)$, que es un vector que no apunta hacia el origen de coordenadas. Si lo cumple en esos puntos de S, lo cumple para toda la parametrización, porque esta es regular. De modo que Φ invierte orientación de S. Con esto,

$$\begin{aligned} \text{Flujo de F a traves de S} &= \iint_S F.dS \\ &= -\iint_D (0, 0, e^{\operatorname{sen}(3\cos\theta, 3\operatorname{sen}\theta)}).(3\cos\theta, 3\operatorname{sen}\theta, 0)\, dA = 0. \end{aligned}$$

Ejemplo 5.4.11. Calcular el flujo del campo $F(x, y, z) = (x\cos y, x, xz)$ a través de la porción de la superficie $z = \operatorname{sen} y$ con (x, y) en $[0, 2] \times [0, \pi]$ orientada según un campo de vectores normales unitario continuo N que verifica $N(1, \pi/2, 1) = (0, 0, -1)$.

La superficie $z = \operatorname{sen} y$ es una especie de sábana trigonométrica: para cada x se tiene la curva $z = \operatorname{sen} y$, así que es una especie de cilindro en el que la curva es la imagen de una función trigonométrica. La sombra da S en el plano xy es el rectángulo $[0, 2] \times [0, \pi]$. Todo esto se puede visualizar en la figura 5.35.

Una parametrización relativamente visible es la siguiente

$$\Phi(x, y) = (x, y, \operatorname{sen} y),$$

con

$$D = \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le \pi. \end{cases}$$

Para ver la orientación de la parametrización, se mira el vector normal:

$$\begin{cases} \Psi_x &= (1, 0, 0) \\ \Phi_y &= (0, 1, \cos y) \end{cases} \Rightarrow \Phi_x \times \Phi_y = (0, -\cos y, 1).$$

En este caso, la orientación está dada según cómo es el vector normal en un punto en concreto. El punto $(1, \pi/2, 1) \in S$ pues verifica todas las condiciones que la determinan. Pero además, existe $(x_0, y_0) \in D$ tal que $\Phi(x_0, y_0) = (1, \pi/2, 1)$, pues si no fuera así $Im(\Phi) \neq S$. Para comprobar lo de la orientación se debe hallar (x_0, y_0) y luego evaluar a $\Phi_x \times \Phi_y$ en ese punto de D:

$$\Phi(x_0, y_0) = (1, \pi/2, 1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 &= 1 \\ y_0 &= \pi/2 \\ \operatorname{sen} y_0 &= 1. \end{cases}$$

La igualdad entre vectores es componente a componente, de modo que $(x_0, y_0) = (1, \pi/2)$. Con esto,

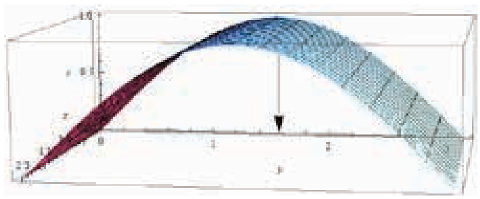
$$\Phi_x \times \Phi_y(1, \pi/2) = (0, -\cos\pi/2, 1)$$

y se tiene que invierte orientación Φ pues el normal tiene el sentido contrario al pedido en el enunciado (esto se podía ver rápidamente cuando se obtuvo $\Phi_x \times \Phi_y$, ya que la tercera coor-

denada era constante y negativa, así que nunca podría tomar valores positivos). Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\iint_S F.dS &= -\int_0^2\int_0^{\pi}(x\cos y, x, x\operatorname{sen} y).(0,-\cos y,1)\,dydx\\ &= -\int_0^2\int_0^{\pi} x\operatorname{sen} y - x\cos y\,dydx\\ &= \int_0^2 x(\cos\pi-\cos 0)\,dx = \left[-x^2\right]_0^2 = -4.\end{aligned}$$

Figura 5.35: Superficie $z=\operatorname{sen} y$ con (x,y) en $[0,2]\times[0,\pi]$



Ejemplo 5.4.12. Sea S la superficie determinada por $z=x^2+y^2-y$ e $y+z\leq 2$ orientada con vectores normales tales que su tercera coordenada es positiva. Si $F(x,y,z)=(y,x+2,z-2)$ calcular $\iint_S F.dS$.

La expresión $z=x^2+y^2-y$ puede reescribirse si se completan cuadrados de la siguiente manera:

$$z=x^2+y^2-y+1-1=x^2+(y-1)^2-1 \Rightarrow z+1=x^2+(y-1)^2.$$

De modo que la nueva expresión describe un paraboloide con eje de simetría $(0,1,z)$, que es paralelo al eje z. Además, su vértice es el punto $(0,1,-1)$.

Por otro lado la condición $y+z\leq 2$ es el semiespacio determinado por el plano $y+z=2$ que contiene al $(0,0,0)$. Con esto, S tiene un gráfico como el de la figura 5.36.

Como

$$\begin{cases} z &= x^2+y^2-y \\ z &\leq 2-y \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2-y\leq 2-y \Rightarrow x^2+y^2\leq 2,$$

esto dice que la sombra de esta superficie en el plano xy es el disco de centro en el origen y radio $\sqrt{2}$. Con esto, una parametrización posible de S es

$$\Psi(r,\theta)=\left(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, r^2-r\operatorname{sen}\theta\right)$$

con una sombra

$$D=\begin{cases} 0\leq r\leq\sqrt{2}\\ 0\leq\theta\leq 2\pi.\end{cases}$$

Corresponde destacar que hay otras parametrizaciones que podrían usarse, por ejemplo,

$$\Psi(r,\theta) = \big(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta + 1, r^2 - 1\big)\,,$$

pero el dominio de esta parametrización no sería una circunferencia sino una elipse, lo cual puede complicar mucho las cuentas. Entonces, tomando Φ como parametrización, se puede ver si esta preserva o no la orientación de S:

$$\left\{\begin{array}{ll} \Phi_r & = (\cos\theta, \mathrm{sen}\,\theta, 2r - \mathrm{sen}\,\theta) \\ \Psi_\theta & = (-r\,\mathrm{sen}\,\theta, r\cos\theta, -r\cos\theta) \end{array}\right. \Rightarrow \Phi_r \times \Phi_\theta = (-2r^2\cos\theta, r - 2r^2\,\mathrm{sen}\,\theta, r).$$

Como la tercera coordenada de $\Phi_r \times \Phi_\theta$ es mayor o igual a 0, se tiene que Φ preserva orientación de S. De modo que,

$$\begin{aligned} \iint_S F.dS &= \iint_D F(\Phi).\left(\Phi_r \times \Phi_\theta\right)\, dr d\theta \\ &= \iint_D (r\,\mathrm{sen}\,\theta, r\cos\theta, r^2 - r\,\mathrm{sen}\,\theta).(-2r^2\cos\theta, r - 2r^2\,\mathrm{sen}\,\theta, r) d\theta dr \\ &= \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} -4r^3\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + r^2\cos\theta - r^2\,\mathrm{sen}\,\theta + r^3\, d\theta dr \\ &= 2\pi\int_0^{\sqrt{2}} r^3\, dr = 2\pi.\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{\sqrt{2}} = 2\pi. \end{aligned}$$

Ejemplo 5.4.13. Sea $F(x,y,z) = (z,1,y)$. Calcular $\iint_S F.dS$ si S es la superficie definida como

$$S = \big\{(x,y,z):\ x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1\,,\ |y| \le x\big\}\,,$$

orientada con normales con primera coordenada positiva.

Se trata de una porción de la cáscara de la esfera de radio 1 y centro $(0,0,1)$. La desigualdad $|y| \le x$, que se toma sobre la cáscara esférica, es equivalente a $-x \le y \le x$, lo que finalmente deja una superficie que es un cuarto de gajo esférico (ver figura 5.37). Para parametrizar esta superficie se puede pensar en parametrizar la esfera corrida del origen y luego lograr la acotación restringiendo los rangos de ϕ y θ:

$$\Phi(\theta,\phi) = (\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, 1 + \cos\phi)\,,$$

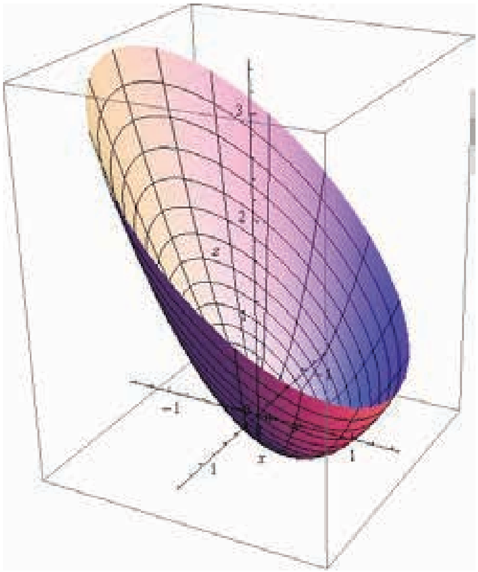
con

$$D = \left\{\begin{array}{cl} 0 & \le \phi \le \pi \\ -\dfrac{\pi}{4} & \le \theta \le \dfrac{\pi}{4}. \end{array}\right.$$

El vector normal de la parametrización es

$$\Phi_\theta \times \Phi_\phi = \big(-\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\,\phi, -\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}^2\,\phi, -\mathrm{sen}\,\phi(1+\cos\phi)\big)$$

Figura 5.36: Superficie determinada por $z = x^2 + y^2 - y$ **e** $y + z \leq 2$



y la primera coordenada es $-\cos\theta\,\text{sen}^2\,\phi$, que cumple

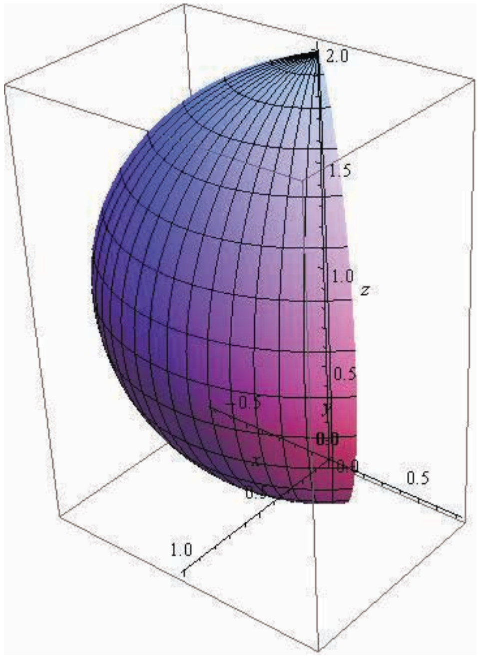
$$\begin{cases} \cos\theta & \geq 0\,\forall\,\theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \\ -\,\text{sen}\,\theta & \leq 0,\,\forall\,\phi \in [0,\pi], \end{cases}$$

lo cual la hace negativa, así que Φ invierte orientación de S. Con esto,

$$\begin{aligned} \iint_S F.dS &= -\int_0^{\pi}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos\phi, 1, \text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi). \\ & \quad \left(-\cos\theta\,\text{sen}^2\,\phi, -\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}^2\,\phi, -\,\text{sen}\,\phi(1+\cos\phi)\right)\,dA \\ &= -\int_0^{\pi}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \text{sen}^2\,\phi\cos\phi(\cos\theta + \text{sen}\,\theta) + \text{sen}^2\,\phi(\cos\theta + 2\,\text{sen}\,\theta)d\theta d\phi \\ &= -\int_0^{\pi} \sqrt{2}\cos\phi\,\text{sen}^2\,\phi - \sqrt{2}\,\text{sen}^2\,\phi\,d\phi \\ &= \sqrt{2}\left[\frac{1}{3}\text{sen}^3\,\phi - \frac{1}{2}(\phi - \text{sen}\,\phi\cos\phi)\right]_0^{\pi} = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}. \end{aligned}$$

Observación 5.4.14. Si la superficie es una porción de plano, el vector normal es constante para todo punto de la superficie. De hecho, no se requiere de una parametrización para poder saber qué dirección y módulo tiene. Entonces, si se tiene que calcular $\iint_S F.dS$ y S es una porción

Figura 5.37: Superficie $S = \{(x, y, z) : \, x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1 \, , \, |y| \leq x\}$



del plano de ecuación implícita $ax + by + cz = d$ se tiene que un vector normal unitario a S es $N = \frac{1}{\|(a,b,c)\|}(a, b, c)$. Se puede suponer que ese N apunta en el sentido en el que está orientada la superficie (sino, se cambia el signo). Retomando la definición 5.4.3, queda que

$$\begin{aligned} \iint_S F.dS &= \iint_S F.N \, dS = \iint_S (F_1, F_2, F_3).\frac{1}{\|(a,b,c)\|}(a, b, c) \, dS \\ &= \iint_S \frac{1}{\|(a,b,c)\|} \left[aF_1 + bF_2 + cF_3 \right] \, dS. \end{aligned}$$

Lo que queda es una integral sobre el campo escalar $f = \frac{1}{\|(a,b,c)\|} \left[aF_1 + bF_2 + cF_3 \right]$. Esta integral se puede calcular parametrizando a S pero sin preocuparse de si preserva o no orientación, dado que se trata de una función escalar y no vectorial.

Observación 5.4.15. Es importante tener en cuenta que la observación anterior solo se puede aplicar en el caso de que los vectores normales sean constantes (como se mencionó, en el caso de superficies planas). Si la superficie no es plana no se puede fijar un vector normal unitario N que sea perpendicular a la superficie para todo punto de ella.

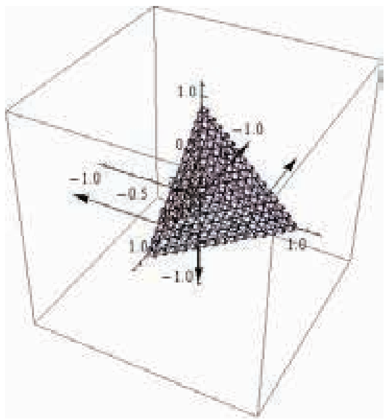
En el caso del ejemplo 5.4.8, el vector normal a toda la superficie en el sentido que está orientada la superficie es $N = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Entonces, queda

$$\iint_S F.dS = \iint_S (xy, z, x).\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) dS = \iint_S \frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{x}{\sqrt{2}} dS$$

y luego se puede resolver con mucha mayor facilidad la integral que queda (debido a que ya no hay que hacerse problema por la orientación de la superficie).

Ejemplo 5.4.16. Calcular el flujo saliente de $F(x, y, z) = (y, z + 1, x)$ la superficie frontera del tetraedro en el primer octante $x + y + z \leq 1$.

Figura 5.38: Superficie frontera del tetraedro $x + y + z \leq 1$ y orientación externa



El flujo saliente de una superficie cerrada quiere decir que las normales apuntan hacia afuera del sólido (se dice que S está orientada hacia afuera o exteriormente). En este caso, el tetraedro tiene cuatro caras o superficies triangulares planas, de modo que las orientaciones en cada cara están inducidas por la que tiene la superficie mayor que las contiene. Para mayor comodidad, se escribe

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$$

y, entonces,

$$\iint_S F.dS = \iint_{S_1} F.dS + \iint_{S_2} F.dS + \iint_{S_3} F.dS + \iint_{S_4} F.dS,$$

con las orientaciones de cada cara marcadas en las figuras 5.39a, 5.39b, 5.40a y 5.40b. De este modo se calculan cuatro integrales de manera separada. Al ser todas las caras planas, los vectores normales en cada una de ellas permanecen constantes.

1) S_1: el vector unitario normal a todo punto de la superficie que preserva la orientación heredada por S es $(0,-1,0)$. Se parametriza con $\Phi_1(x,z)=(x,0,z)$ y su sombra en el plano xz es ella misma,

$$D_1=\begin{cases} 0 & \leq x \leq 1 \\ 0 & \leq z \leq 1-x. \end{cases}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} F.dS &= \iint_{S_1} (y,z+1,x).(0,-1,0)\,dS = \iint_{S_1} -z-1\,dS \\ &= \int_0^1\int_0^{1-x} -z-1\,dzdx = \int_0^1 \frac{-1-x^2}{2}+2x\,dx = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

2) S_2: el vector unitario normal a todo punto de la superficie que preserva la orientación heredada por S es $(-1,0,0)$. Se parametriza con $\Phi_2(y,z)=(0,y,z)$ y su sombra en el plano yz es ella misma,

$$D_2=\begin{cases} 0 & \leq y \leq 1 \\ 0 & \leq z \leq 1-y. \end{cases}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} F.dS &= \iint_{S_2} (y,z+1,x).(-1,0,0)\,dS = \iint_{S_2} -y\,dS \\ &= \int_0^1\int_0^{1-y} -y\,dzdy = \int_0^1 -y+y^2\,dy = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

3) S_3: el vector unitario normal a todo punto de la superficie que preserva la orientación heredada por S es $(0,0,-1)$. Se parametriza con $\Phi_3(x,y)=(x,y,0)$ y su sombra en el plano xy es ella misma,

$$D_3=\begin{cases} 0 & \leq x \leq 1 \\ 0 & \leq y \leq 1-x. \end{cases}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \iint_{S_3} F.dS &= \iint_{S_3} (y,z+1,x).(0,0,-1)\,dS = \iint_{S_3} x\,dS \\ &= \int_0^1\int_0^{1-x} -x\,dydx = \int_0^1 x-x^2\,dx = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

4) S_4: esta superficie se parametriza con $\Phi_4(x,y)=(x,y,1-x-y)$ y su sombra en el plano xy es D_3. Además, $\Phi_x\times\Phi_y=(1,1,1)$, el cual claramente preserva orientación. Entonces,

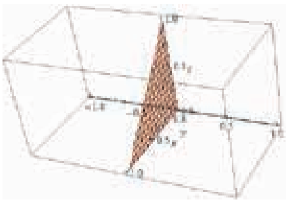
$$\iint_{S_4} F.dS = \int_0^1\int_0^{1-x} (y,2-x-y,x).(1,1,1)dydx = \int_0^1\int_0^{1-x} 2\,dydx = 1.$$

Finalmente,

$$\iint_S F.dS = -\frac{2}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + 1 = 0.$$

Figura 5.39: Bordes S_1 y S_2 del Tetraedro
$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \leq 1, \ x, y, z \geq 0\}$

(a) S_1



(b) S_2

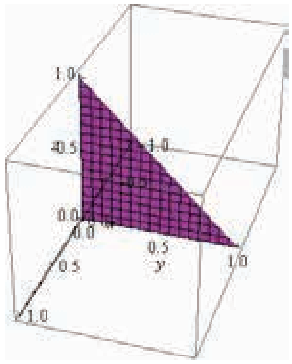
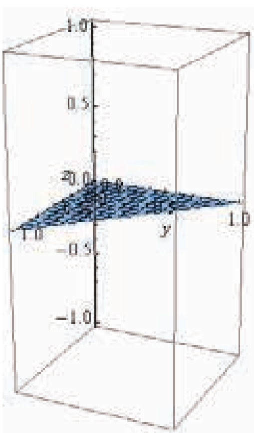
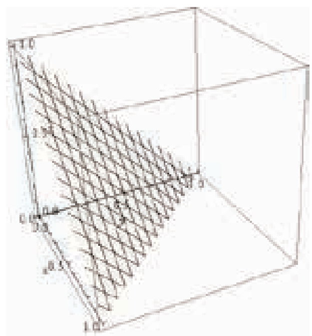


Figura 5.40: Bordes S_3 y S_4 del Tetraedro
$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \leq 1, \ x, y, z \geq 0\}$

(a) S_3



(b) S_4



5.4.3. Práctica

Calcular el flujo de F a través de S en los casos indicados.

1) $F(x, y, z) = (x, x + y, x + y + z)$ a través de la porción del plano $x + 2y + 3z = 1$ que se encuentra en el primer octante, orientada con las normales hacia arriba (o sea, con la tercera componente de los vectores normales positiva).

2) $F(x, y, z) = (2xy, 2xyz, zxy^2)$ a través del trozo de cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = 4$, en el primer octante, con $z \leq 5$ orientado con un campo de vectores normales con primera coordenada negativa.

3) $F(x, y, z) = (y, -x, z)$ a través de $z = x^2 + y^2$ con $x^2 + y^2 \leq 4y$ orientada con un campo de vectores normales que apunta hacia arriba.

4) $F(x, y, z) = (xy, z, y)$ a través de la frontera del cuerpo limitado por $x - y \leq 1, z \leq 1$ en el primer octante orientada con el vector normal exterior.

Parte III

Teoremas de integración

Capítulo 6

Teorema de campos conservativos

6.1. Introducción

En este capítulo veremos una forma de calcular integrales de línea en algunos casos particulares, para lo cual primero introduciremos una definición y el teorema principal. Luego analizaremos varios ejemplos.

Definición 6.1.1. *Sea $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial con $n \in \mathbb{N}$ fijo. Se dice que F es un* ***campo conservativo*** *si existe $f : B \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ escalar tal que*

$$F(x_1, ..., x_n) = \nabla f(x_1, ..., x_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

Es decir que F es el campo gradiente de f. A f se llama ***función potencial***.

A lo largo de este texto consideraremos $n = 2$ o 3, ya que solamente trabajaremos con curvas en el plano o en el espacio.

Teorema 6.1.2. *Sea $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo conservativo y sea C una curva C^1 a trozos orientada desde un punto inicial hasta otro, llamado final. Entonces,*

$$\int_C F.ds = \int_C \nabla f.ds = f(\text{punto final de C}) - \text{f}(\text{punto inicial de C}).$$

Observación 6.1.3. El teorema 6.1.2 asegura que, si el campo es conservativo, lo único que importa son los puntos iniciales y final de la curva, por lo que se podría cambiar el camino (tomar otra curva), con los mismos puntos de partida y de llegada y la integral no cambiaría. Por ejemplo, si $F(x, y) = (2x, 2y)$, $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, este resulta ser conservativo pues $f(x, y) = x^2 + y^2$ cumple que $\nabla f = F$. Si se pide calcular la integral de F sobre C, la media circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$, con $y \geq 0$, orientada de derecha a izquierda, se tiene que $(1, 0)$ y $(-1, 0)$ son los puntos inicial y final, respectivamente. Por el teorema 6.1.2, vale que

$$\int_C F.ds = \int_C \nabla f.ds = f(-1, 0) - f(1, 0).$$

Pero si se pidiera calcular la integral de F sobre C_1, segmento $y = 0$ con $-1 \leq x \leq 1$, orientado del mismo modo, se tendría también que

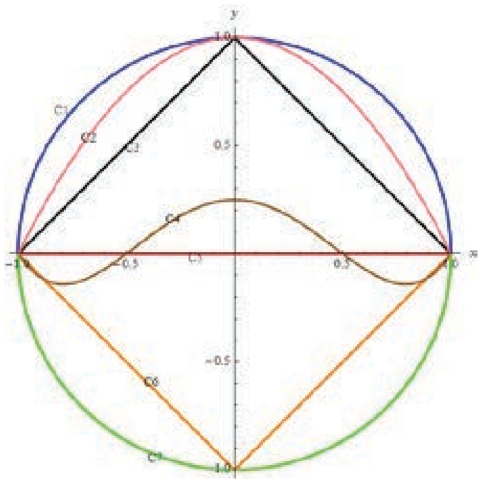
$$\int_{C_1} F.ds = f(-1,0) - f(1,0).$$

Por lo tanto,

$$\int_{C} F.ds = \int_{C_1} F.ds.$$

Las funciones que cumplen con esto también se denominan **funciones de estado**, en las que solo importan los estados inicial y final.

Figura 6.1: Distintos caminos que van desde $(1,0)$ hasta $(-1,0)$



En el ejemplo de la observación sabíamos de antemano que el campo era conservativo. Una pregunta natural que surge en este momento es: ¿cómo se constata que un campo F dado resulte o no ser conservativo? Si se pudiera detectar esto, entonces el teorema 6.1.2 tendría utilidad. El siguiente teorema da un criterio para saber si un campo no es conservativo (o sea, un criterio de descarte).

Teorema 6.1.4. *Sea $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función C^1 definida sobre un dominio A sin "agujeritos". Resultan equivalentes las siguientes proposiciones:*

1) $F = (F_1, ..., F_n)$ *es conservativo.*

2) *La derivadas parciales cruzadas son iguales, esto es*

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \forall 1 \leq i,j \leq n.$$

Corolario 6.1.5. *El criterio del teorema 6.1.4 para detectar si un campo es o no conservativo se traduce en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ de la siguiente manera:*

1) $F = (F_1, F_2) : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *es conservativo* $\Leftrightarrow \dfrac{\partial F_1}{\partial y} = \dfrac{\partial F_2}{\partial x}$.

2) $F = (F_1, F_2, F_3) : B \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *es conservativo* $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial y} = \dfrac{\partial F_2}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial z} = \dfrac{\partial F_3}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F_3}{\partial y} = \dfrac{\partial F_2}{\partial z}. \end{cases}$

Un comentario no menos importante es que, en general, la implicación $(1) \Rightarrow (2)$ del teorema 6.1.4 siempre vale. En cambio, $(2) \Rightarrow (1)$ puede llegar a ser falsa cuando el dominio de la función no cumple con lo pedido. En esos casos, si el campo no verifica la condición de las derivadas cruzadas no será conservativo, pero si las cumple, se deberá probar que existe (o no) una función potencial, construyéndola (o sin poderla construir). En este texto siempre trabajaremos con campos cuyo dominio no presente esas complicaciones.

A continuación iremos resolviendo ejemplos variados relacionados con este tema. Veremos cómo, además de probar que existe un campo conservativo, se lo reconstruye a partir de su campo gradiente.

Ejemplo 6.1.6. Calcular $\int_C F.ds$ si C es la curva imagen de la función $\alpha(t) = (t\cos t, t \operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq 4\pi$, y $F(x, y) = (y + 2xe^{x^2} + \dfrac{2x}{x^2+2}, x - \operatorname{sen} y)$.

En primer lugar, aunque probablemente no sea necesario, se puede pensar en graficar C, ya que $\alpha(t) = t.(\cos t, \operatorname{sen} t)$, lo cual implica que es tomar a los puntos de la circunferencia unitaria descripta por $(\cos t, \operatorname{sen} t)$ y multiplicarlos por t, es decir, por su argumento o ángulo. Por ejemplo:

$$\begin{cases} \alpha(0) &= (0,0) \\ \alpha(\pi/2) &= (0, \pi/2) = \pi/2\,(0,1) \\ \alpha(\pi) &= (-\pi, 0) = \pi\,(-1, 0) \\ \alpha(4\pi) &= (4\pi, 0) = 4\pi\,(1,0). \end{cases}$$

A medida que crece t los puntos se van alejando del origen. Es una especie de remolino o hélice (ver figura 6.2). La orientación de la curva está dada por la parametrización, la cual es regular (esto deberá ser comprobado por el lector), y como $\alpha(0) = (0,0)$ y $\alpha(4\pi) = (4\pi, 0)$, se puede decir que C va desde $(0,0)$ hasta $(4\pi, 0)$.

Por otra parte, la función $F = (F_1, F_2)$ cumple que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial y} &= \dfrac{\partial\left(y + 2xe^{x^2} + \dfrac{2x}{x^2+2}\right)}{\partial y} = 1 \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} &= \dfrac{\partial(x - \operatorname{sen} y)}{\partial x} = 1 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\partial F_1}{\partial y} = \dfrac{\partial F_2}{\partial x}.$$

Por el teorema 6.1.4, existe $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\nabla f = F$. Para hallar f se puede pensar en esta reconstrucción a partir de su gradiente F, que es el único dato de f que se tiene. Como $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (F_1, F_2)$, se puede calcular f en dos pasos:

- $\frac{\partial f}{\partial x} = F_1$, entonces,

$$\begin{aligned} \underbrace{\int \frac{\partial f}{\partial x}\, dx}_{=f} &= \int F_1\, dx \\ f(x,y) &= \int F_1\, dx = \int y + 2xe^{x^2} + \frac{2x}{x^2+2}\, dx \end{aligned}$$

  y se calcula la integral indefinida de la expresión de la derecha teniendo en cuenta de que la variable y resulta una constante respecto de la variable x:

$$f(x,y) = yx + e^{x^2} + ln(x^2+2) + c(y)$$

  la función $c(y)$ es la constante de integración respecto de x, pero podría no ser constante respecto de y, por eso se le pone ese nombre.

- $\frac{\partial f}{\partial y} = F_2$, pero ahora ya se tiene del paso anterior una parte de f dada de forma explícita. La idea es utilizar esta segunda igualdad para saber cómo debe ser $c(y)$:

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{\partial f}{\partial x} & = \frac{\partial\left(yx+e^{x^2}+ln(x^2+2)+c(y)\right)}{\partial x} = x + c'(y) \\ F_2 & = x - \operatorname{sen} y \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x + c'(y)$$

$$\Rightarrow \quad x - \operatorname{sen} y = F_2$$

$$\Rightarrow\ c'(y) = -\operatorname{sen} y.$$

  Ahora se integra respecto de y para obtener $c(y)$:

$$\int c'(y)\, dy = \int -\operatorname{sen} y\, dy \ \Rightarrow\ c(y) = \cos y + cte.$$

Por lo tanto, hay una familia de funciones potenciales f, dada por la forma general:

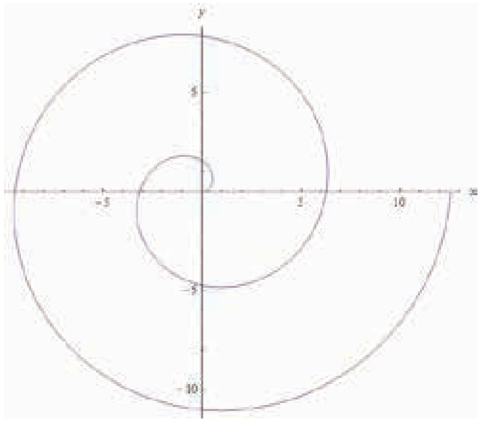
$$f(x,y) = yx + e^{x^2} + ln(x^2+2) + \cos y + cte,$$

con $cte \in \mathbb{R}$. Para cada constante cte hay una función potencial distinta.

Finalmente, aplicando el teorema 6.1.2, queda:

$$\begin{aligned} \int F.ds &= f(\text{punto final de C}) - \text{f(punto inicial de C)} = \text{f}(4\pi, 0) - \text{f}(0,0) \\ &= e^{16\pi^2} + ln(16\pi^2+2) + 1 + cte - (1 + ln\, 2 + 1 + cte) \\ &= e^{16\pi^2} + ln(16\pi^2+2) + ln\, 2. \end{aligned}$$

Figura 6.2: Curva imagen de la función $\alpha(t) = (t\cos t, t\operatorname{sen} t)$**,** $0 \leq t \leq 4\pi$



Ejemplo 6.1.7. Sea C la curva determinada por la intersección de $x^2+z^2 = 9$ y $z+y = 0$ con $y \leq 0$, orientada de izquierda a derecha observada desde el semieje positivo de las y. Calcular $\int_C F\, ds.$, si

$$F(x, y, z) = \left(y + y^2 z\, ,\, x + z + 2xyz + \frac{2y}{1+y^2}\, ,\, y + xy^2\right)$$

La curva en cuestión es una media elipse en el plano $z + y = 0$, cuya sombra en el plano xz es la media circunferencia $x^2 + z^2 = 9$ con $z \geq 0$. Su gráfico se muestra en la figura 6.3.

Para calcular la integral de línea habría que parametrizar esta curva, pero al armar la integral quedaría algo muy difícil de calcular. Por esto, se puede mirar si el campo tiene chances de ser conservativo. Para esto se miran las derivadas parciales cruzadas con $F = (F_1, F_2, F_3)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial y} & = 1 + 2yz = \dfrac{\partial F_2}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial z} & = y^2 = \dfrac{\partial F_3}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F_3}{\partial y} & = 1 + 2xy = \dfrac{\partial F_2}{\partial z}. \end{cases}$$

Por lo tanto, existe f escalar tal que $\nabla f = F$, es decir que el campo es conservativo. Si se tiene en cuenta que el punto final es $(-3, 0, 0)$ y el punto inicial es $(3, 0, 0)$, la integral de línea se puede calcular de la siguiente manera:

$$\int_C F.ds = f(-3, 0, 0) - f(3, 0, 0).$$

Para esto se necesita hallar explícitamente a f, y la forma de hacerlo es la siguiente: si $\nabla f = F$ entonces, $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}\right) = (F_1, F_2, F_3)$, de modo que

- $\dfrac{\partial f}{\partial x} = F_1 \;\Rightarrow\; f = \int F_1\, dx$. Aquí lo único que se hace es integrar respecto de la primera variable para intentar recuperar una parte de f:

$$f(x,y,z) = \int F_1\, dx = \int y + y^2 z\, dx = yx + y^2 zx + H(y,z).$$

En este paso se integró respecto de x, así que las variables z e y resultan constantes. Además, al tratarse de integración indefinida, queda una constante, llamada $H(y,z)$ justamente por el hecho de que será constante respecto de x (que es la variable sobre la cual se está integrando), pero podría no serlo respecto de z o de y. Si no se considera esto es posible que se esté suprimiendo algún término de f y no se podría obtener esta función potencial correctamente.

- $\dfrac{\partial f}{\partial y} = F_2$. Como ya se tiene del primer ítem una primera parte de f conocida, se la puede colocar en la expresión de la izquierda y derivar luego respecto de y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial (yx + y^2 zx + H(y,z))}{\partial y} = x + 2xyz + \frac{\partial H}{\partial y}$$

y la expresión de la derecha corresponde a F_2, que es:

$$F_2 = x + z + 2xyz + \frac{2y}{1+y^2}.$$

Al igualar se obtiene lo siguiente

$$x + 2xyz + \frac{\partial H}{\partial y} = x + z + 2xyz + \frac{2y}{1+y^2} \;\Rightarrow\; \frac{\partial H}{\partial y} = z + \frac{2y}{1+y^2}.$$

Para saber mejor quién es H se integra ahora con respecto a la variable y a ambos lados de la igualdad (lo que había quedado era una ecuación diferencial en derivada parcial):

$$\int \frac{\partial H}{\partial y}\, dy = \int z + \frac{2y}{1+y^2}\, dy \;\Rightarrow H(y,z) = zy + ln(1+y^2) + h(z),$$

cuando nuevamente queda una constante, h, pero respecto de y y de x, ya que H lo era previamente. Podría no ser constante respecto de z. La función f hasta el momento queda reconstruida de la siguiente manera:

$$f(x,y,z) = yx + y^2 zx + zy + ln(1+y^2) + h(z).$$

- $\dfrac{\partial f}{\partial z} = F_3$. Se usa toda la información que hasta el momento se tiene de f y se la coloca en la expresión de la izquierda, como se hizo en el segundo ítem

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial \left(yx + y^2 zx + zy + ln(1+y^2) + h(z)\right)}{\partial z} = xy^2 + y + h'(z)$$

$$F_3 = y + xy^2.$$

Ahora se iguala lo anterior

$$xy^2 + y + h'(z) = y + xy^2 \Rightarrow h'(z) = 0$$

y se integra respecto de z a ambos lados de la igualdad

$$\int h'(z)\, dz = \int 0\, dz \Rightarrow h(z) = Cte.$$

En este caso, la función h resultó ser una constante respecto de z.

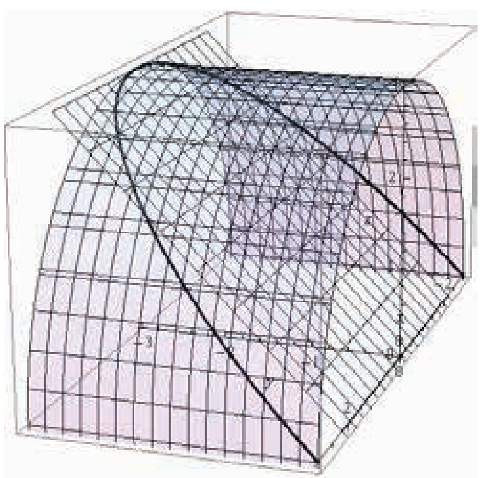
Finalmente, de igualar las tres derivadas parciales, se pudo reconstruir una familia (infinita) de funciones potenciales f que cumplen tener a F como gradiente:

$$f(x, y, z) = yx + y^2zx + zy + ln(1 + y^2) + K,\ K \in \mathbb{R}.$$

Para cada $K \in \mathbb{R}$ se tiene una función potencial diferente que cumple con lo pedido (o dicho de otro modo: todas la funciones potenciales de F difieren en solo una constante). ¿Cuál hay que elegir para hacer el cálculo de la integral? Cualquiera, pues al hacer $f(\text{punto final}) - f(\text{punto inicial})$ la contante Cte se suma y resta, así que no infiere en el resultado. Por comodidad, se elige $Cte = 0$. Con esto, finalmente se calcula la integral:

$$\int F.ds = f(-3, 0, 0) - f(3, 0, 0) = 0 - 0 = 0.$$

Figura 6.3: Curva intersección de $x^2 + z^2 = 9 \wedge z + y = 0$ con $y \leq 0$



Observación 6.1.8. Si F es conservativo ($F = \nabla f$) y C es curva cerrada, entonces,

$$\int_C F.ds = f(\text{punto final de C}) - \text{f}(\text{punto inicial de C}) = 0,$$

pues $\text{punto final de C} = \text{punto inicial de C}$.

Pero no hay que confundirse, porque no vale la recíproca: si una integral de línea de un campo F sobre una curva cerrada C da 0, el campo puede **NO** ser conservativo (para esto, ver el ejemplo 6.1.9).

Tampoco vale que si una integral sobre un campo conservativo es 0 entonces la curva es cerrada (sugerimos al lector pensar en el ejemplo 6.1.7).

Ejemplo 6.1.9. Calcular $\int_C F.ds$, si $F(x,y) = (-y^2, 1)$ y C es la circunferencia unitaria del plano con centro en el origen de coordenadas, orientada antihorariamente.

Una parametrización de esta curva es $\sigma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, con $0 \leq t \leq 2\pi$. Esta parametrización preserva la orientación de la curva (se sugiere que el lector lo verifique). Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int_C F.ds &= \int_0^{2\pi} F(\cos t, \operatorname{sen} t).(-\operatorname{sen} t, \cos t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen}^2 t, 1).(-\operatorname{sen} t, \cos t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \underbrace{\operatorname{sen}^3 t}_{=\operatorname{sen} t(1-\cos^2 t)} + \cos t\, dt = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} t \cos^2 t + \cos t\, dt \\
&= \left[-\cos t + \frac{\cos^3 t}{3} + \operatorname{sen} t \right]_0^{2\pi} = 0.
\end{aligned}$$

Sin embargo, a pesar de que esta integral de línea sobre una curva cerrada da 0 el campo F no es conservativo pues:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -2y \neq 0 = \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

Observación 6.1.10. (En cuanto al método de obtención de la función potencial de un campo conservativo).

No importa el orden de las ecuaciones en el que se vaya trabajando para obtener la función potencial: se podría primero empezar con la igualdad $\dfrac{\partial f}{\partial y} = F_2$ e integrar primero respecto de y, luego obtener datos de la tercera ecuación $\dfrac{\partial f}{\partial z} = F_3$ y finalmente de la primera. En ningún orden planteado cambiará la familia de funciones potenciales que se obtiene. Lo que sí puede suceder es que en algún orden sea más fácil hacer las cuentas. Para no confundir, en este texto se elige seguir el orden en el que suelen darse las variables, es decir, el orden planteado en el ejemplo 6.1.7.

Ejemplo 6.1.11. Sea C la curva parametrizada por $\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$,

$$\sigma(t) = \left(t\,\mathrm{sen}(t-1), (t-1)\,\mathrm{sen}\,t, \frac{1}{1+t^2} \right)$$

y $F(x,y,z) = (e^x \cos y + yz, xz - e^x \,\mathrm{sen}\, y, xy + z)$. Calcular $\int_C F.ds$.

En este caso, la curva C está definida por una parametrización y, dada su expresión, no es muy fácil de graficar. Por lo cual se intentará prescindir de su gráfico. Lo que se puede saber es cuáles son sus puntos inicial y final dado que la orientación está dada por el recorrido que sigue σ, que es una parametrización regular. C se recorre desde $\sigma(0)$ hasta $\sigma(1)$, ya que 0 y 1 son sus parámetros inicial y final, respectivamente. Se tiene que

$$\begin{cases} \sigma(0) &= \left(0\ \mathrm{sen}(0-1), (0-1)\,\mathrm{sen}\,0, \dfrac{1}{1+0^2}\right) = (0,0,1) \\ \sigma(1) &= \left(1\ \mathrm{sen}(1-1), (1-1)\,\mathrm{sen}\,1, \dfrac{1}{1+1^2}\right) = \left(0,0,\dfrac{1}{2}\right). \end{cases}$$

Ahora hay que notar que F es una función difícil de integral, por lo cual habría que fijarse si no se trata de un campo conservativo:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial y} &= -e^x \,\mathrm{sen}\, y + z = \dfrac{\partial F_2}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial z} &= y = \dfrac{\partial F_3}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F_3}{\partial y} &= x = \dfrac{\partial F_2}{\partial z} \end{cases} \quad \Rightarrow \exists\, f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \,/\, F = \nabla f.$$

Se trata entonces de obtener la función potencial f a partir del método desarrollado en el ejemplo 6.1.7.

- $\dfrac{\partial f}{\partial x} = F_1 \Rightarrow f = \int F_1\, dx$. Se integra respecto de la variable x:

$$f = \int F_1\, dx = \int e^x \cos y + yz\, dx = e^x \cos y + yxz + H(y,z).$$

- $\dfrac{\partial f}{\partial y} = F_2$. Se coloca en la expresión de la izquierda lo obtenido de f y se deriva luego respecto de y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial\left(e^x \cos y + yxz + H(y,z)\right)}{\partial y} = -e^x \,\mathrm{sen}\, y + zx + \frac{\partial H}{\partial y}$$

y la expresión de la derecha corresponde a F_2, que es:

$$F_2 = xz - e^x \,\mathrm{sen}\, y,$$

al igualar se obteniene lo siguiente

$$-e^x \,\mathrm{sen}\, y + zx + \frac{\partial H}{\partial y} = xz - e^x \,\mathrm{sen}\, y \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial y} = 0.$$

Luego,

$$\int \frac{\partial H}{\partial y}\, dy = \int 0\, dy \;\Rightarrow H(y,z) = h(z)$$

y la función f hasta el momento queda reconstruida de la siguiente manera

$$f(x,y,z) = e^x \cos y + yxz + h(z)$$

- $\dfrac{\partial f}{\partial z} = F_3$. Con esto,

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial\left(e^x \cos y + yxz + h(z)\right)}{\partial z} = xy + h'(z)$$

$$F_3 = xy + z.$$

Ahora se iguala lo anterior

$$xy + h'(z) = xy + z \;\Rightarrow\; h'(z) = z \;\Rightarrow\; h(z) = \frac{z^2}{2} + cte.$$

Por lo tanto, las funciones potenciales son de la forma

$$f(x,y,z) = e^x \cos y + yxz + \frac{z^2}{2} + cte\,,\; cte \in \mathbb{R}$$

Se elige $cte = 0$ y se aplica el teorema 6.1.2:

$$\begin{aligned}\int_C F.ds &= f(\underbrace{\sigma(1)}_{\text{pto. inicial}}) - f(\underbrace{\sigma(0)}_{\text{pto. final}}) \\ &= f\left(0,0,\frac{1}{2}\right) - f(0,0,1) = 1 + 0 + \frac{1}{8} - 1 - 0 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{8}.\end{aligned}$$

6.2. Práctica

1) Determinar si los siguientes campos vectoriales F en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$ (según corresponda) son gradientes de un campo escalar. En caso afirmativo, calcular todas las funciones potenciales φ de F.

a) $F(x,y) = (x,y)$

b) $F(x,y) = (y,x) - 4$

c) $F(x,y) = (2xe^y + y, x^2e^y + x - 2y)$

d) $F(x,y,z) = (x+z, -y+z, x-y)$

e) $F(x,y,z) = (2xy^3, x^2z^3, 3x^2yz^2)$

f) $F(x, y, z) = (3y^4z^2, 4x^3z^2, -3x^2y^2)$

g) $F(x, y, z) = (y^2 \cos x + z^3, -4 + 2y \operatorname{sen} x, 3xz^2 + 2)$

h) $F(x, y, z) = (4xy - 3x^2z^2 + 1, 2(x^2 + 1), -2x^3z - 3z^2)$

2) Calcular $\oint_C \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2} dx + \left(\frac{e^y}{1+x^2} + 1\right) dy$, siendo C la elipse de ecuación $9x^2 + 4y^2 = 36$.

3) Demostrar que el campo de fuerzas $F(x, y, z) = (2xz^3 + 6y, 6x - 2yz, 3x^2z^2 - y^2)$ es conservativo. Luego, calcular $\int_C F ds$, siendo C cualquier camino que une el punto $(2, -1, 0)$ con el $(1, 3, -2)$.

4) Sea $F(x, y, z) = (y^2 + z, 2xy + 1 - z, x - y)$. Calcular la integral de F a lo largo de la curva C imagen de la función $\alpha\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ dada por $\alpha(t) = (\cos \pi t, (t^2 + 1)/(t^4 + 3), 5e^{t^2-1})$

Capítulo 7

Teorema de Green

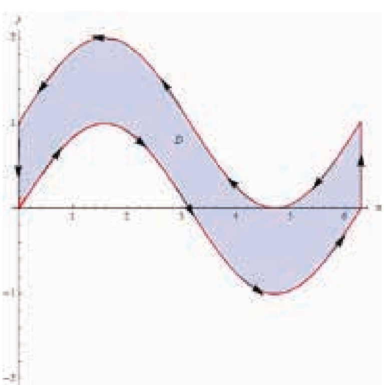
7.1. Introducción

Teorema 7.1.1. *(Teorema de Green). Sean D una región plana de tipo III y C su borde, curva simple y regular a trozos. Si $F : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$, es una función definida y C^1 en todo D, entonces,*

$$\int_{C+} F.dS = \iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dxdy. \tag{7.1.1}$$

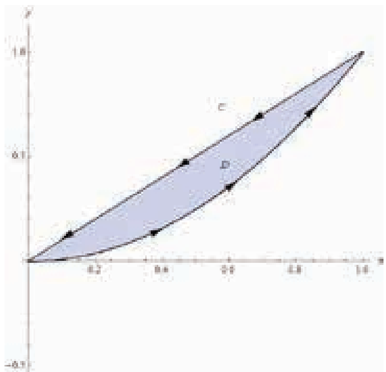
Donde la orientación positiva de la curva representa el sentido antihorario de la misma. Es decir, si se camina sobre la misma en el sentido positivo, la región D debe quedar siempre de la izquierda.

Figura 7.1: Región D y su borde C, con su orientación marcada



Ejemplo 7.1.2. Sea C la curva dada en el ejemplo 4.3.6, que estaba dada por la unión de las curvas $y = x$ e $y = x^2$, siempre con $0 \leq x \leq 1$. Había que calcular $\int_C F\, ds$, si $F(x, y) = (e^{x^2} - cos\, x^2 + xy, ln(y^2 + 1) - y)$, con C orientada antihorariamente.

Figura 7.2: Curva unión de $y = x$ e $y = x^2$, con $0 \leq x \leq 1$ y región D encerrada



Este es el ejemplo 4.4.11, en el que quedó planteada una integral de línea con primitivas desconocidas. Se puede ver si se cumplen las hipótesis del teorema de Green:

- La curva C es cerrada, simple y es borde de la región D, descripta como

$$D = \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 \leq y \leq x. \end{cases}$$

- C está orientada positivamente pues antihorario implica que la región D queda a la izquierda al caminar por C.

- F es un campo C^1 en D pues lo es para todo $\mathbb{R}^3$ por tener componentes que son a su vez funciones C^1.

Se está, entonces, en las condiciones del teorema de Green, por lo cual la ecuación (7.1.1)

$$\int_{C^+} F.dS = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, dxdy.$$

Si

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 - x = -x,$$

entonces,

$$\begin{aligned}\int_{C^+} F.dS &= \iint_D -x\,dxdy = -\int_0^1 \int_{x^2}^{x} x\,dydx \\ &= -\int_0^1 xy|_{y=x^2}^{y=x}\,dx = -\int_0^1 x^3 - x^2\,dx \\ &= -\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{12}.\end{aligned}$$

Aquí hemos visto la utilidad de este teorema, que relaciona una integral de línea con una integral doble. Cabe destacar que si alguna de las hipótesis no se cumple, dichas integrales podrían ser bien distintas.

Ejemplo 7.1.3. Sea C el triángulo de vértices $(0,0)$, $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ y $(2,0)$, recorridos en ese orden. Si $F(x,y) = (y^2 + cos(x^2+1), x - y^7)$, calcular $\int_C F.ds$.

- La curva C es cerrada, simple y es borde de la región triangular D, la cual se puede describir de la siguiente manera

$$D = \begin{cases} 0 & \leq y \leq \dfrac{2}{3} \\ y & \leq x \leq 2 - 2y. \end{cases}$$

  Lo último sale del hecho de que la recta $x + 2y = 2$ es la que contiene a los puntos $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ y $(2,0)$.

- Si se observa el gráfico (ver figura 7.3), se puede notar que C está orientada en sentido horario, lo cual significa que su orientación es negativa (justo la opuesta a la del teorema de Green). Pero como la relación entre una orientación y la otra en la integral se ve reflejada solo en un signo, no será gran problema.

- F es un campo C^1 en D pues lo es para todo $\mathbb{R}^2$ por tener componentes que son a su vez funciones C^1.

Se está, entonces, en las condiciones del teorema de Green, por lo cual la ecuación (7.1.1)

$$\int_{C^+} F.dS = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy,$$

pero planteado para la orientación antihoraria. Si

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - 2y,$$

entonces,

$$\begin{aligned}\int_{C^+} F.dS &= \iint_D 1-2y\,dxdy = \int_0^{\frac{2}{3}}\int_y^{2-2y} 1-2y\,dxdy \\ &= \int_0^{\frac{2}{3}} x-2xy\Big|_{x=y}^{x=2-2y}\,dy = \int_0^{\frac{2}{3}} 6y^2-7y+2\,dy \\ &= \left[2y^3-\frac{7}{2}y^2+2y\right]_0^{\frac{2}{3}} = \frac{10}{27}.\end{aligned}$$

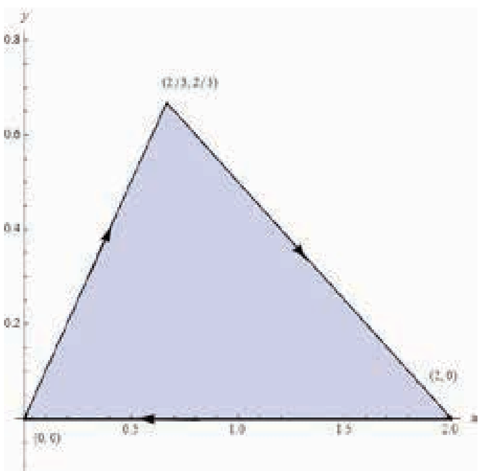
Pero como lo que se pedía era

$$\int_{C^-} F.ds$$

entonces

$$\int_{C^-} F.ds = -\int_{C^+} F.ds = -\frac{10}{27}.$$

Figura 7.3: Triángulo de vértices $(0,0)$, $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ y $(2,0)$, recorridos en ese orden



Ejemplo 7.1.4. Sea C la circunferencia de radio 2 y centro $(0,1)$, orientada antihorariamente. Si $F(x,y)=\left(x^2-\cos(x^7)-y, e^{y\,\mathrm{sen}\,y}+x\right)$, calcular $\int_C F.ds$.

Claramente la circunferencia se trata de una curva cerrada y encierra el disco de mismo radio y centro. Además, el campo F es C^1 en todo $\mathbb{R}^3$. Por lo tanto, se puede aplicar el teorema

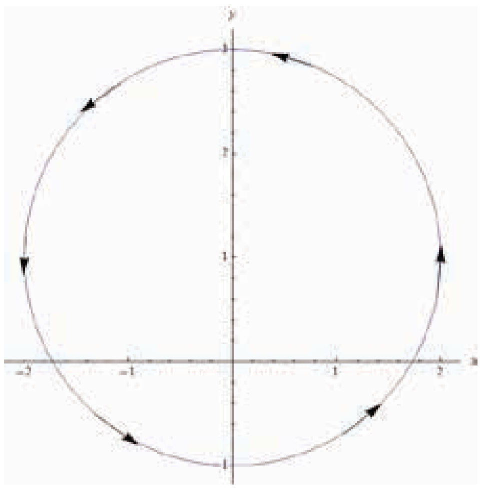
de Green y

$$\int_{C^+} F.ds = \iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dxdy = \iint_D 2\, dxdy = 2A(D).$$

Lo que quedó a la derecha de la expresión es el doble del área del disco de radio 2 y centro $(0,1)$, entonces,

$$\int_{C^+} F.ds = 2A(D) = 2\pi 2^2 = 8\pi.$$

Figura 7.4: Circunferencia de radio 2 y centro $(0,1)$, orientada antihorariamente



Ejemplo 7.1.5. Sea C la curva dada por el gráfico de la función $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \text{sen}(x)$ orientada de izquierda a derecha. Calcular $\int_C F.ds$ para $F(x,y) = \big(y^2, -x + \cos(\pi e^y)\big)$.

La curva en este caso se trata del gráfico de una función trigonométrica y es el correspondiente a la figura 7.5. Lo primero que se puede observar en este caso, es que se trata de una curva que no es cerrada, dado que hay puntos inicial y final, $(0,0)$ y $(\pi,0)$, respectivamente. Por lo tanto no se estaría en este caso en condiciones de aplicar el teorema de Green. Pero se puede observar que si se considera el segmento C_1 de la recta $y = 0$ con $0 \le x \le \pi$, la curva $C_2 = C \cup C_1$ sí es cerrada. La región encerrada es la que está por debajo del gráfico de la función $f(x) = \text{sen}(x)$ y por arriba del eje x, con $0 \le x \le \pi$, la cual se describe como

$$D = \begin{cases} 0 & \le x \le \pi \\ 0 & \le y \le \text{sen}\, x. \end{cases}$$

Ahora bien, el campo F es C^1 (porque lo es cada componente del mismo). Así que el teorema de Green asegura para la curva C_2 lo siguiente:

$$\begin{aligned}\int_{C_2^+} F.ds &= \iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dxdy = \int_0^{\pi}\int_0^{\operatorname{sen} x} -1 - 2y\, dydx \\ &= \int_0^{\pi} \left[-y - y^2\right]_{y=0}^{y=\operatorname{sen} x} dx = \int_0^{\pi} -\operatorname{sen}^2 x\, dx.\end{aligned}$$

En este punto hay que detenerse y analizar algunas cuestiones.

1) Lo que se está calculando es la integral de F sobre C_2, que no es lo que pide la consigna. Pero, si se tiene en cuenta que $C_2 = C \cup C_1$ sin superponerse, entonces,

$$\int_{C_2^+} F.ds = \int_{C\leftarrow} F.ds + \int_{C_1\rightarrow} F.ds$$

con las orientaciones de C y de C_1 heredadas de la de C_2. Se puede notar que la heredada para C es justo la opuesta a la que tiene la curva misma. Pero para no generar confusión, en la igualdad proveniente del teorema se colocará siempre la orientación heredada. Con esto,

$$\int_{C\leftarrow} F.ds = \int_{C_2^+} F.ds - \int_{C_1\rightarrow} F.ds = \int_0^{\pi} -\operatorname{sen}^2 x\, dx - \int_{C_1\rightarrow} F.ds.$$

2) La primitiva $\int \operatorname{sen}^2 x\, dx$ se calcula primero utilizando el método de integración partes

$$\begin{cases} u = \operatorname{sen} x \Rightarrow u' = \cos x \\ v' = \operatorname{sen} x \Rightarrow v = -\cos x \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int \operatorname{sen}^2 x\, dx &= -\operatorname{sen} x \cos x + \int \cos^2 x\, dx \\ &= -\operatorname{sen} x \cos x + \int 1 - \operatorname{sen}^2 x\, dx \\ &= -\operatorname{sen} x \cos x + \int 1\, dx - \int \operatorname{sen}^2 x\, dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad 2\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = &\quad -\operatorname{sen} x \cos x + x + C \\ \Rightarrow \quad \int \operatorname{sen}^2 x\, dx = &\quad \frac{x - \operatorname{sen} x \cos x}{2} + C\end{aligned}$$

Así que

$$\int_0^{\pi} -\operatorname{sen}^2 x\, dx = -\left[\frac{x - \operatorname{sen} x \cos x}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

3) Hay que calcular la integral $\int_{C_1\rightarrow} F.ds$, para lo cual se requiere una parametrización de C_1. Una simple es

$$\alpha(t) = (t, 0)\,,\; 0 \leq t \leq \pi,$$

y cumple que

$$\begin{cases} \alpha(0) &= (0,0) \\ \alpha(\pi) &= (\pi, 0) \\ \alpha'(t) &= (1,0) \neq (0,0),\; \forall t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

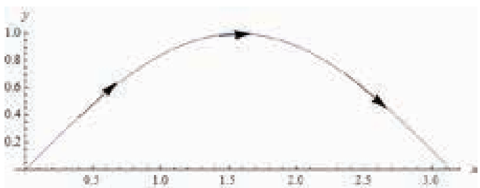
Entonces preserva orientación porque recorre C_1 de izquierda a derecha (según la orientación heredada por C_2 a causa del teorema de Green). Por lo tanto

$$\int_{C_1\rightarrow} F.ds = \int_0^{\pi} (0, -t).(1,0)\,dt = \int_0^{\pi} 0\,dt = 0.$$

Finalmente,

$$\int_C F.ds = \int_{C\rightarrow} F.ds = -\int_{C\leftarrow} F.ds = -\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

Figura 7.5: Curva gráfico de $f : [0,\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ orientada de izquierda a derecha



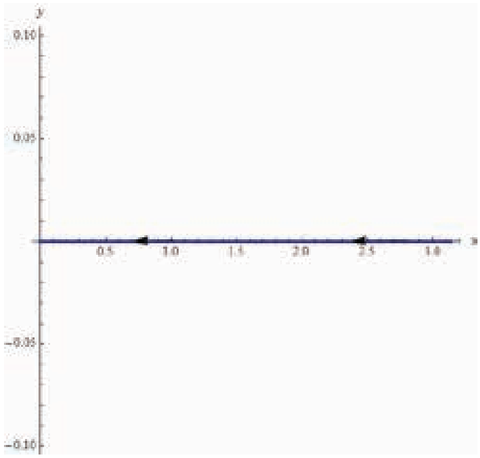
Si hacemos las cosas paso a paso no habrá confusiones en cuanto a los signos y a las orientaciones, pero hay que ser muy cuidadosos. Del ejemplo anterior se puede hacer la siguiente observación.

Observación 7.1.6. Si se tiene una curva que no es cerrada se puede intentar conseguir otra tal que la unión de las mismas genere una curva que sí sea cerrada. La elección de la segunda curva es arbitraria pero determina a la región D a considerar. Por ejemplo, si se tiene la mitad de la circunferencia unitaria con centro en el origen tal que $y \geq 0$, se pueden considerar dos curvas (hay infinitas a considerar, se mostrarán solo las dos más cercanas).

1) El segmento $y = 0$ con $-1 \leq x \leq 1$.

2) La mitad de circunferencia restante $x^2 + y^2 = 1, y \leq 0$.

Figura 7.6: Curva C_2 con la orientación marcada según el teorema de green



En el primer caso, la región D_1 que queda encerrada por la curva cerrada es el medio disco unitario, en tanto que en el segundo caso queda D_2 como el disco unitario completo.

Ejemplo 7.1.7. Sea C la curva definida por $x^2+y^2 = 1, y \leq x$, orientada desde $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ hasta $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Sea $F(x, y) = \big(xy + log(x^6 + 1), x^2 - log(y^4 + 1)\big)$, calcular $\int_C F.ds$.

Esta curva corresponde a una porción de la circunferencia unitaria, más precisamente a una mitad de ella, considerando el corte con la recta $y = x$. ¿La curva es cerrada? No, pues es solo el arco de circunferencia, dado que son los puntos del plano que deben cumplir que $x^2 + y^2 = 1$, además de que $y \leq 0$. El gráfico puede verse en la figura 7.7.

Si se considera otra curva C_1, que puede ser el segmento de la recta $y = x$ con $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, se tiene que $C \cup C_1$ es una curva cerrada. Como F es C^1 en el plano, entonces,

$$\int_{(C\cup C_1)+} F.ds \underbrace{=}_{\text{Teo. Green}} \iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dxdy,$$

con D la región encerrada por la unión de las dos curvas C y C_1, que es medio disco. Separando por aditividad la integral de la izquierda, teniendo en cuenta la orientación que heredan desde el teorema de Green, sigue que

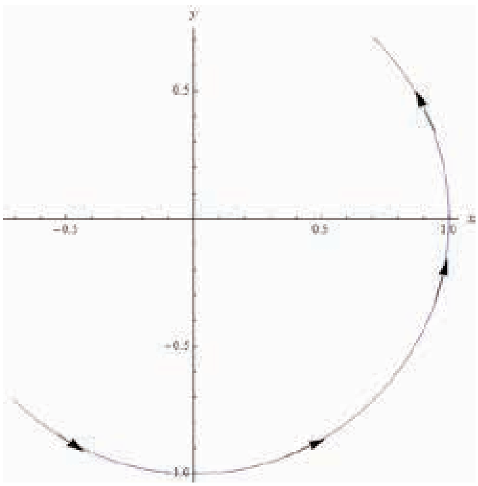
$$\int_{C\nearrow} F.ds + \int_{C_1\swarrow} F.ds = \iint_D 2x - y\, dxdy,$$

entonces,

$$\int_{C\nearrow} F.ds = \underbrace{\iint_D 2x - y\,dxdy}_{\mathbf{1})} - \underbrace{\int_{C_1\swarrow} F.ds}_{\mathbf{2})}.$$

En este caso la integral sobre C que brinda el teorema de Green tiene a la curva en cuestión

Figura 7.7: Curva $x^2 + y^2 = 1$, $y \leq x$, orientada desde $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ hasta $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$



orientada de igual modo que lo que se pide, así que no habrá cambios de signo sobre el resultado al final. Se calcula ahora la expresión de la derecha de la igualdad.

1) Esta región no conviene describirla con coordenadas cartesianas, porque habría que subdividirla en varias regiones. Pero si se piensa en coordenadas polares

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}, \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ \frac{5\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{9\pi}{4}, \end{cases}$$

donde el límite inferior de θ sale de considerar la igualdad $y = x$ en coordenadas polares, teniendo en cuenta de que se está primero en el tercer cuadrante y luego en el

primero (también se puede pensar como que $-\frac{3}{4}\pi \leq \theta \leq \frac{1}{4}\pi$). Con esto,

$$\begin{aligned}\iint_D 2x - y\, dxdy \underbrace{=}_{\text{TCV}} & \int_0^1 \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} (2r\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta) r\, d\theta dr \\ = & \int_0^1 r^2 \left[2\operatorname{sen}\theta + cos\theta\right]_{\theta=\frac{5\pi}{4}}^{\theta=\frac{9\pi}{4}} dr = \int_0^1 r^2 3\sqrt{2}.\, dr \\ = & \left[\frac{3\sqrt{2}r^3}{3}\right]_0^1 = \sqrt{2}\end{aligned}$$

2) La curva C_1 puede parametrizarse con $\alpha(t) = (t,t)$, con $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \leq t \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Se puede probar que α recorre C_1 en sentido ascendente, así que invierte orientación de C_1. Además $\alpha'(t) = (1,1)$. Con esto

$$\int_{C_1\swarrow} F.ds = -\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} F(t,t).(1,1)\, dt = -\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} 2t^2\, dt = -\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Por lo tanto, el resultado es

$$\int_{C\nearrow} F.ds = \sqrt{2} - \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \sqrt{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Ejemplo 7.1.8. Sea C la curva frontera de la región del plano definida por $|y| \leq |x|$ para $-1 \leq x \leq 2$. Si $F(x,y,z) = (\cos(x^2) - y, \operatorname{sen}(y^8))$ calcular $\int_\alpha F\, ds$ para la orientación de α dada por el recorrido $(2,2)$, $(-1,-1)$, $(-1,1)$, $(2,-2)$, $(2,2)$.

La región D de la cual esta curva C es frontera es la unión de dos triángulos, uno con vértices en $(2,-2)$, $(2,2)$ y $(0,0)$, que se llamará D_1, y otro con vértices en $(0,0)$, $(-1,-1)$ y $(-1,1)$, que se llamará D_2. Así, $D = D_1 \cup D_2$. Estas regiones resultan ser elementales. La curva $C = C_1 \cup C_2$ con C_1 borde de D_1 y C_2 borde de D_2. Es decir, C_1 y C_2 son curvas cerradas y simples, a diferencia de C que no era lo segundo, ya que se cruza a así misma. Como el campo F es C^1 en $\mathbb{R}^2$, se puede aplicar el teorema de Green sobre las curvas C_1 y C_2, por separado:

1) $\int_{C_1^{antih}} F.ds \underbrace{=}_{\text{TG}} \iint_{D_1} Q_x - P_y\, dxdy = \iint_{D_1} 0 - (-1)\, dxdy = \iint_{D_1} 1\, dxdy$. La región D_1 se describe como

$$\begin{cases} -1 & \leq x \leq 0 \\ x & \leq y \leq -x. \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\int_{C_1^{antih}} F.ds = \iint 1\, dxdy = \int_{-1}^{0}\int_{x}^{-x} 1\, dydx = -2\int_{-1}^{0} x\, dx = 1.$$

2) $\int_{C_2^{antih}} F.ds \underbrace{=}_{\text{TG}} \iint_{D_2} Q_x - P_y\, dxdy = \iint_{D_2} 0-(-1)\, dxdy = \iint_{D_2} 1\, dxdy$. La región D_2 se describe como:

$$\begin{cases} 0 & \leq x \leq 2 \\ -x & \leq y \leq x. \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\int_{C_2^{antih}} F.ds = \iint_{D_2} 1\, dxdy = \int_0^2 \int_{-x}^{x} 1\, dydx = -2\int_0^2 x\, dx = 4.$$

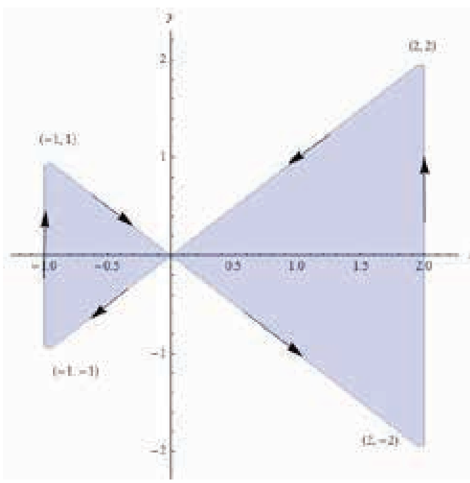
Pero

$$C^{or} = C_1^{hor} \cup C_2^{antih}$$

Es decir, la orientación de C_1 heredada por la de C es horaria, en tanto que resulta antihoraria para C_2. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{C^{or}} F.ds &= \int_{C_1^{hor}} F.ds + \int_{C_2^{antih}} F.ds \\ &= -\int_{C_1^{antih}} F.ds + \int_{C_2^{antih}} F.ds = -1+4 = 3. \end{aligned}$$

Figura 7.8: Curva frontera de la región $|y| \leq |x|$ con $-1 \leq x \leq 2$



7.2. Práctica

1) Verificar el teorema de Green para el campo $F(x,y) = (-y,x)$ y la región $D \subset \mathbb{R}^2$ definida por

$$D = \left\{ (x,y) : x^2 + y^2 \leq 1,\ y \leq \sqrt{3}x,\ y \geq -\frac{x}{\sqrt{3}} \right\}$$

¿Cuál es el área de D?

2) Evaluar $\oint_C ydx - xdy$ donde C es la frontera del cuadrado $[-2,1] \times [0,3]$, orientada positivamente, usando el teorema de Green.

3) Calcular la circulación del campo $F(x,y) = (x^2y, y)$ a lo largo de la curva $C : (x-2)^2 + y^2 = 1, y \geq 0$ orientada de izquierda a derecha.

Capítulo 8

Teorema de Gauss

8.1. Introducción

Definición 8.1.1. *Sea $F : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una función vectorial $F = (F_1, F_2, F_3)$. Definimos la* ***divergencia de*** F *como la función div$(F) : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\text{div}(F) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

Teorema 8.1.2. *(Teorema de Gauss o de la divergencia). Sea S una superficie cerrada y orientada por la normal exterior (que llamaremos orientación positiva), frontera de un región $W \subseteq \mathbb{R}^3$ de tipo IV simétrica (o unión de regiones de tipo IV). Si $F : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial definido y C^1 en todo W, entonces,*

$$\iint_{S^+} F.dS = \iiint_W \text{div}(F)\, dV.$$

Ejemplo 8.1.3. En el ejemplo 5.4.16, la superficie era el borde de un tetraedro, es decir, sus cuatros caras triangulares. Para calcular la integral de superficie que se pedía había que realizar cuatro parametrizaciones y se hacía bastante largo de resolver. No obstante, ahora se puede notar que se está en las condiciones del teorema de Gauss.

1) La superficie S es cerrada porque es frontera de un sólido W, en este caso el tetraedro $x + y + z \leq 1$ con $x, y, z \geq 0$ y además se pedía que las normales fueran salientes, así que S está orientada positivamente.

2) W es una región de tipo IV simétrica.

3) $F(x, y, z) = (y, z + 1, x)$ es una función vectorial C^1 en todo $\mathbb{R}^3$, en particular en W, porque cada componente es una función polinómica.

Entonces, por el teorema de Gauss vale la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned}\iint_{S^+} F.dS &= \iiint_W \text{div}(F)\, dV = \iiint_W \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\, dV \\ &= \iiint_W 0 + 0 + 0\, dV = 0.\end{aligned}$$

Lo que muestra el ejemplo anterior es que con este teorema se pueden llegar a facilitar mucho las cuentas. Seguimos ofreciendo más ejemplos.

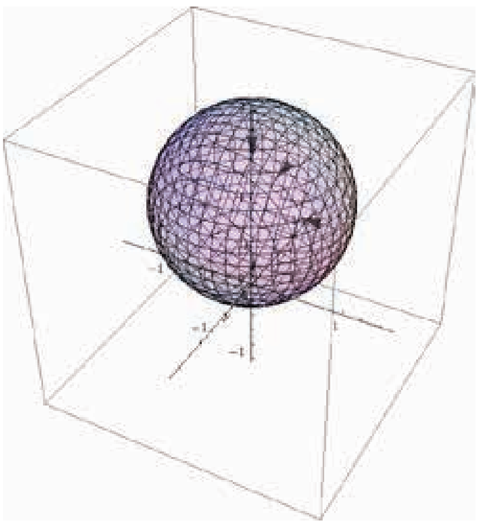
Ejemplo 8.1.4. Si $F(x, y, z) = \left(\ln(y^2 + 1), z + y, \text{sen}(x^2) + (z - 1)^2\right)$ y S es la superficie frontera del sólido definido por

$$W = \left\{(x, y, z) :\ x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 1, z \geq 1\right\},$$

orientada con vectores normales interiores, calcular $\iint_S F.dS$.

En este caso, el sólido W es una media esfera con centro en $(0, 0, 1)$ y radio 1 (ver figura 8.1).

Figura 8.1: Sólido $W = \{(x, y, z) :\ x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 1, z \geq 1\}$ y su superficie frontera con sus respectivos vectores normales



Para parametrizar la superficie frontera, que es la unión de la cáscara esférica superior y la tapa circular $x^2 + y^2 \leq 1$, $z = 1$, se podrían pensar en dos parametrizaciones y la integral sería la suma de las integrales. El problema es que la función F no resulta fácil de integrar porque aparecen en sus componentes funciones de las que desconocemos primitivas, por lo cual se intentará utilizar el teorema de Gauss para calcular lo pedido. Primero hay que ver si se cumplen las hipótesis:

1) La superficie S es cerrada porque es frontera de un sólido W, en este caso la media esfera unitaria con centro $(0,0,1)$ con $z \geq 1$. En este caso S está orientada negativamente porque dice que tiene normales interiores.

2) W es una región de tipo IV simétrica.

3) $F(x,y,z) = (y, z+1, x)$ es una función vectorial C^1 en todo $\mathbb{R}^3$, en particular en W, porque cada componente es una función C^1, ya que lo que está adentro del logaritmo siempre es positivo.

Entonces, el teorema de Gauss dice que

$$\iint_{S^+} F.dS = \iiint_W \text{div}(F)\, dV.$$

Pero lo que se quiere en realidad es

$$\iint_{S^-} F.dS,$$

pero no importa, porque se puede calcular lo que da la igualdad por el teorema y luego se cambia el signo del resultado. Esto vale porque

$$\iint_{S^-} F.dS = -\iint_{S^+} F.dS.$$

Entonces, se debe calcular $\iiint_W \text{div}(F)\, dV$ y luego cambiar el signo (suele ser mejor hacerlo al final de las cuentas para no confundirse): a W se la puede describir con las siguientes coordenadas esféricas:

$$\begin{cases} x &= \rho\cos\theta \operatorname{sen}\phi \\ y &= \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \\ z &= \rho\cos\phi + 1 \end{cases} \quad \text{con} \begin{cases} 0 & \leq \rho \leq 1 \\ 0 & \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 & \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

La divergencia se calcula como

$$\text{div}(F) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 1 + 2(z-1).$$

Entonces, por el teorema de Gauss

$$\begin{aligned} \iint_{S^+} F.dS &= \iiint_W \text{div}(F)\, dV = \iiint_W 1 + 2(z-1)\, dV \\ &\underbrace{=}_{\text{TCV}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 + 2\rho\cos\phi)\, \underbrace{\rho^2 \operatorname{sen}\phi}_{J(\rho,\theta,\phi)}\, d\theta d\rho d\phi. \end{aligned}$$

Se puede notar que en la última igualdad se utilizó cambio de variables en $\mathbb{R}^3$, ya que se trata de una integral triple,

$$\begin{aligned}
&= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \rho^2 \operatorname{sen}\phi + 2\rho^3 \cos\phi \operatorname{sen}\phi \, d\phi d\rho \\
&= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}\phi}{3} + \frac{\cos\phi \operatorname{sen}\phi}{2} \, d\phi \\
&= 2\pi \left[\frac{-\cos\phi}{3} + \frac{\operatorname{sen}^2\phi}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{7}{6}\pi.
\end{aligned}$$

En muchos casos, alguna de las hipótesis no se cumple. En estos casos, la igualdad ente las expresiones suele ser falsa, como puede ilustrarse en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 8.1.5. Sea S la frontera del sólido definido por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ y F el campo

$$F(x,y,z) = \left(\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}, \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}, \frac{z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} \right)$$

Calcular el flujo de F a través de S, con S orientado con el campo normal exterior.

En este caso, se puede observar que si bien se trata de una superficie cerrada (es la esfera unitaria hueca), el campo F ni siquiera se encuentra definido en el $(0,0,0)$, que es el origen de la esfera maciza o sólido W sobre el que se aplicaría el teorema. Entonces no se cumpliría la hipótesis de que el campo sea C^1 en W. De hecho, si se calcula la divergencia de F:

$$\begin{aligned}
\text{div}(F) &= \frac{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3} - 3x^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{(x^2+y^2+z^2)^3} \\
&\quad + \frac{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3} - 3y^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{(x^2+y^2+z^2)^3} \\
&\quad + \frac{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3} - 3z^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{(x^2+y^2+z^2)^3} \\
&= \frac{3\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3} - 3(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{(x^2+y^2+z^2)^3} \\
&= \frac{3\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3} - 3\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}{(x^2+y^2+z^2)^3} = 0.
\end{aligned}$$

y, entonces,

$$\iiint_W \text{div}(F)\, dV = 0$$

Por otro lado, si se calcula $\iint_S F.ds$ de modo directo, es decir, se parametriza S con $\Phi(\theta, \phi) = (\cos\theta \operatorname{sen}\phi, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \cos\phi)$, con $(\theta, \phi) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$, entonces,

$$F(\Phi) = (\cos\theta \operatorname{sen}\phi, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \cos\phi) \, .$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) \times \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\right) &= (-\,cos\theta\; sen^2\phi, -\,sen\theta\; sen^2\phi, -\,sen\phi\; cos\phi) \\ &= -\operatorname{sen}\phi\, \Phi(\theta, \phi). \end{aligned}$$

Como $0 \leq \phi \leq \pi$, se tiene que $\operatorname{sen}\phi \geq 0$ y, entonces, Φ invierte orientación, dado que los normales toman al vector $\Phi(\theta, \phi)$ y le cambian el sentido con el signo "$-$".

$$\begin{aligned} \iint_S F.dS &= -\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (\cos\theta \operatorname{sen}\phi, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \cos\phi) \, . \\ &\quad (-\,cos\theta\; sen^2\phi, -\,sen\theta\; sen^2\phi, -\,sen\phi\; cos\phi)\, d\phi d\theta \\ &= -\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} -\cos^2\theta \operatorname{sen}^3\phi - \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}^3\phi - \operatorname{sen}\phi \cos^2\phi \, d\phi d\theta \\ &= -\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} -\operatorname{sen}^3\phi - \operatorname{sen}\phi\cos^2\phi \, d\phi d\theta \\ &= -\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} -\operatorname{sen}\phi \, d\phi d\theta = [2\pi \; \cos\phi]_0^{\pi} \\ &= 2\pi(-1-1) = -4\pi. \end{aligned}$$

Lo que tenemos es que en este caso

$$-4\pi = \iint_{S^+} F.dS \neq \iiint_W \text{div}(F)\, dV = 0$$

y esto es lo que suele ocurrir cuando alguna de las hipótesis no se cumple. Es que el teorema de Gauss en este caso no puede ser aplicado.

Ejemplo 8.1.6. Calcular el flujo de $F(x, y, z) = (2x^2, x^2 z, \cos x - \operatorname{sen} y)$ a través de la superficie frontera del cuerpo definido por $x + y + z \leq 2, 0 \leq z \leq y, y \leq x$ en el primer octante, orientada por el campo de vectores normales exterior.

Se pide el flujo de F a través de una superficie S, lo cual se calcula mediante la siguiente integral:

$$\iint_S F.dS$$

La dificultad de este ejemplo es poder graficar y describir el cuerpo del cual la superficie S es su frontera.

- La superficie S es cerrada y tiene orientación positiva (exterior).
- El campo F es C^1 en todo el espacio, en particular lo es en W, que se llamará el cuerpo en cuestión.

- Se puede suponer que será W de tipo IV o unión de regiones de ese tipo.

Entonces, están dadas las condiciones para aplicar el teorema de la divergencia:

$$\iint_{S^+} F.dS = \iiint_W \text{div}(F)\, dV,$$

con W el tetraedro de la figura 8.3. Para describirlo, conviene tomar la sombra en el plano yz, que es el triángulo D (ver figura 8.2), que se puede describir como

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq z \leq y \end{cases}$$

y luego, los límites de la variable x serán

$$y \leq x \leq 2 - z - x.$$

Con esto, ya se puede calcular lo pedido:

$$\begin{aligned} \iint_{S^+} F.dS &= \iiint_W \underbrace{4x}_{\text{div}(F)} dV = \int_0^1 \int_0^y \int_y^{2-z-y} 4x\, dxdzdy \\ &= \int_0^1 \int_0^y 2(2-z-y)^2 - 2y^2\, dzdy \\ &= \int_0^1 \int_0^y y^2 - 2y + 4 - z^2 - 2z + 2zy - 2y^2\, dzdy \\ &= \int_0^1 \left[y^2 z - 2yz + 4z - \frac{z^3}{3} - z^2 + yz^2 - 2y^2 z \right]_0^y dy \\ &= \int_0^1 -\frac{y^3}{3} - 3y^2 + 4y\, dy = \left[-\frac{y^4}{12} - y^3 + 2y^2 \right]_0^1 = \frac{11}{12}. \end{aligned}$$

Ejemplo 8.1.7. Dada S, superficie definida por $x^2 + y^2 + z^2 = 1\,, y \leq 0$, orientada con vectores de segunda coordenada positiva, Calcular el flujo de $F(x, y, z) = (x + y^7.cos(y^4), y, z)$ a través de S.

Esta superficie corresponde a una mitad de la cáscara esférica unitaria, aquella que verifica la condición $y \leq 0$. Como los puntos de S satisfacen la condición $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, S se trata de una superficie que no es cerrada, dado que los únicos puntos correspondientes al plano $y = 0$ que verifican la primera condición son los de la circunferencia $x^2 + z^2 = 1$ en el plano xz. La orientación de S coincide con el hecho de que cada vector normal a la superficie apunte hacia el origen ver gráfico en la figura 8.3. El flujo de F a través de S se calcula mediante la siguiente integral de superficie:

$$\text{Flujo}_S(F) = \iint_{S^{or}} F.dS.$$

Figura 8.2: Sombra en el plano yz del sólido $x + y + z \leq 2, 0 \leq z \leq y$, $y \leq x$ en el primer octante

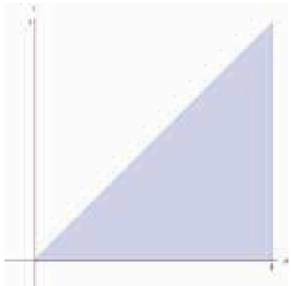
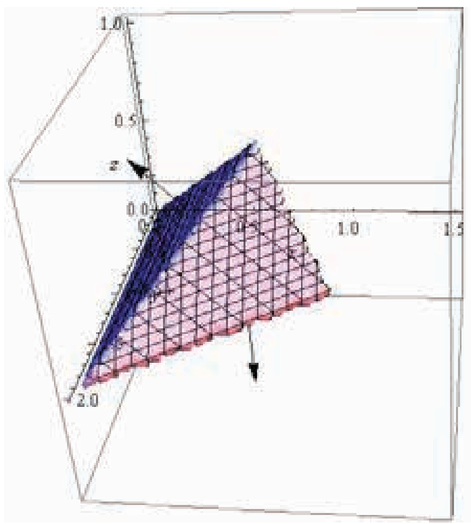


Figura 8.3: Sólido $x + y + z \leq 2, 0 \leq z \leq y, y \leq x$ en el primer octante, y su superficie frontera con sus respectivos vectores normales



Para calcular esta integral por definición, se necesitaría una parametrización de S. Pero una vez obtenida habría que evaluar a F en dicha parametrización, lo cual puede quedar muy feo al momento de hacer el producto escalar para integrar. De modo que conviene fijarse si se está en condiciones de aplicar el teorema de Gauss (o de la divergencia), que relaciona una integral de superficie con una integral triple.

1) El primer problema surge al momento de observar si la superficie S resulta cerrada,

pues no lo es. Pero si se considera la superficie S_1, que es la superficie frontera del sólido $W = \{(x, y, z) :\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, y \leq 0\}$, resulta que S_1 es, por definición, cerrada. Además $S_1 = S \cup T$, con $T = \{(x, y, z) :\ x^2 + z^2 \leq 1\,, y = 0\}$, que es el disco unitario con centro en el origen que se encuentra en el plano $y = 0$.

2) F es un campo C^1 en todo el espacio (más aún en W), dado que cada componente es una función C^1.

3) La región W es de tipo IV.

Entonces, utilizando la igualdad del teorema de Gauss, se está en condiciones de plantear lo siguiente:

$$\iint_{S_1^+} F.dS = \iiint_W \text{div}(F)\, dV.$$

Pero $S_1^+ = (S \cup T)^+$, entonces, se debe reescribir esta integral en términos de S y de T para obtener algo que sirva para resolver la consigna. Las orientaciones de S y de T deben ser compatibles con las que tiene S_1 (y pueden no ser las que pida el ejercicio), así que:

- T debe estar orientada con las normales apuntando hacia los $y \geq 0$, o sea que sus segundas coordenadas deben ser positivas;
- S debe estar orientada con las normales apuntando hacia los $y \leq 0$, o sea que sus segundas coordenadas deben ser negativas.

Entonces,

$$\iint_{S^{2da.\leq 0}} F.dS + \iint_{T^{2da.\geq 0}} F.dS = \iint_{S_1^+} F.dS = \iiint_W \text{div}(F)\, dV.$$

De modo que

$$\iint_{S^{2da.\leq 0}} F.dS = \iiint_W \text{div}(F)\, dV - \iint_{T^{2da\geq 0}} F.dS$$

Si bien lo que se quería obtener era

$$\iint_{S^{2da.\geq 0}} F.dS,$$

esto se relaciona con el resultado de aplicar el teorema de Gauss (mismo módulo pero distinto signo), ya que son la integral sobre una misma función y una misma superficie pero con distinta orientación. O sea,

$$\iint_{S^{2da.\leq 0}} F.dS = \underbrace{\iiint_W \text{div}(F)\, dV}_{\mathbf{1})} - \underbrace{\iint_{T^{2da.\geq 0}} F.dS}_{\mathbf{2})};$$

1) La divergencia es

$$\text{div}(F) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3,$$

entonces,

$$\iiint_W \text{div}(F)\, dV = \iiint_W 3\, dV = 3\,\text{Vol}(W) = 3\frac{\left(\frac{4\pi}{3}\right)}{2} = 2\pi.$$

Donde la segunda igualdad se obtiene a partir del hecho de que W es la mitad de la esfera unitaria maciza.

2) Se necesita una parametrización de T, que puede ser $\Phi(x,z) = (x,0,z)$ con $\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to T$ y $D = \{(x,z) :\ x^2 + z^2 \leq 1\}$ (dominio en el disco unitario en el plano xz). Las derivadas parciales son

$$\begin{cases} \Phi_x &= (1,0,0) \\ \Phi_z &= (0,0,1). \end{cases}$$

Entonces, el vector normal será

$$\Phi_x \times \Phi_z = (0,-1,0)$$

con segunda coordenada negativa para todo $(x,z) \in D$, de modo que Φ invierte orientación. Por lo tanto,

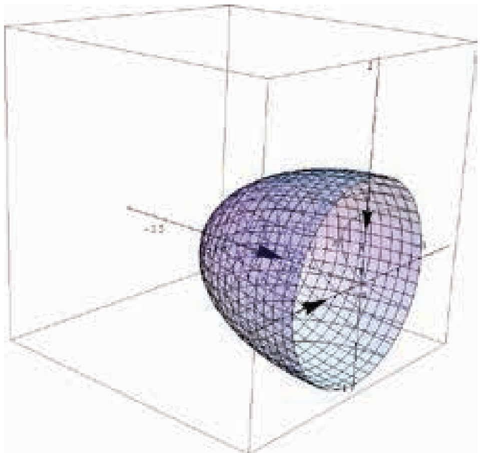
$$\begin{aligned} \iint_{T^{2da.\geq 0}} F.dS &= -\iint_D F(x,0,z).(0,-1,0)\, dxdz \\ &= -\iint_D (x,0,z).(0,-1,0)\, dxdz = 0. \end{aligned}$$

Finalmente, la integral pedida será

$$\iint_{S^{2da.\geq 0}} F.dS = -\iint_{S^{2da.\leq 0}} F.dS = -(2\pi - 0) = -2\pi.$$

Lo que se ilustra con el ejemplo anterior es que el teorema de Gauss puede utilizarse aun cuando la superficie no sea cerrada, pero sea posible cerrarla de un modo simple, es decir, considerando otra superficie tal que la unión sea cerrada pero que las cuentas sobre ella no sean demasiado difíciles. Si en el ejemplo anterior se hubiera optado por cerrar S con la otra cáscara esférica, $x^2+y^2+z^2 = 1\,, y \geq 0$, el sólido W hubiera sido la esfera maciza $x^2+y^2+z^2 \leq 1$, pero al tener que restar la integral de F sobre la segunda cáscara esférica hubiera persistido el problema de integración (quedarían igual integrales difíciles o imposibles de calcular). Por lo cual, en el momento de plantear cerrar una superficie es necesario hacerlo con alguna de tipo plana.

Figura 8.4: Superficie definida por $x^2 + y^2 + z^2 = 1\,,\, y \leq 0$ y orientada



Ejemplo 8.1.8. Calcular el flujo de

$$F(x, y, z) = \big(x + y^2, zx + \ln(z^2 + 1), 4z + \ln(x^2 + y^2 + 4)\big)$$

a través de la superficie $S = \big\{(x, y, z) : \, x = 4 - y^2 - z^2 \,,\, x \geq 0\big\}$, orientada con normales con primera coordenada negativa.

La superficie S es un paraboloide con eje de simetría $(x, 0, 0)$ (eje x) y vértice en $(4, 0, 0)$, con $0 \leq x \leq 4$. Se trata de una superficie que no es cerrada, puesto que la igualdad $x = 4 - y^2 - z^2$ excluye al interior del disco $y^2 + z^2 \leq 4$, en $x = 0$. Pero como la integral es algo difícil de calcular dada la naturaleza de la función, se considerará cerrarla y ver si se pueden cumplir las hipótesis del teorema de Gauss.

1) S no es cerrada, pero si se considera $T = \big\{(x, y, z) : \, y^4 + z^2 \leq 4 \,,\, x = 0\big\}$ resulta que $S \cup T$ es cerrada.

2) W es una región simétrica de tipo IV encerrada por $S \cup T$ y es el paraboloide macizo

$$W = \big\{(x, y, z) : \, 0 \leq x \leq 4 - y^4 - z^2\big\}\,.$$

3) F es un campo vectorial C^1 en W.

Entonces, por el teorema de Gauss:

$$\iint_{(S \cup T)^+} F.dS = \iiint_W \text{div}(F)\, dV.$$

La orientación de S heredada por el teorema involucra normales de primera coordenada positiva, en tanto que para T es con normales de primera coordenada negativa. Así que usando

esto y la aditividad de las integrales de superficie queda:

$$\iint_{S^{1ra\geq 0}} F.dS = \underbrace{\iiint_W \text{div}(F)\, dV}_{\mathbf{1})} - \underbrace{\iint_{T^{1ra\leq 0}} F.dS}_{\mathbf{2})};$$

1) $\text{div}(F) = 1 + 0 + 4 = 5$ y la región W puede describirse mediante coordenadas cilíndricas, como

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r \operatorname{sen}\theta \\ z &= z \end{cases} \quad \text{con} \begin{cases} 0 &\leq r \leq 2 \\ 0 &\leq \theta \leq 2\pi \\ 0 &\leq z \leq 4 - x^2 - y^2 = 4 - r^2. \end{cases}$$

De modo que

$$\begin{aligned} \iiint_W \text{div}(F)\, dV &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{4-r^2} 5 \underbrace{r}_{J(r,\theta,z)} dz d\theta dr \\ &= 5 \int_0^2 \int_0^{2\pi} r(4-r^2)\, d\theta dr = 10\pi \left[2r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^2 \\ &= 40\pi. \end{aligned}$$

2) El disco T puede parametrizarse con

$$\Phi(y,z) = (0, y, z),$$

$(y,z) \in D = \left\{(y,z) : y^4 + z^2 \leq 4\right\}$. El vector normal se calcula como

$$\begin{cases} \Phi_y &= (0,1,0) \\ \Phi_z &= (0,0,1) \end{cases} \Rightarrow \Phi_y \times \Phi_z = (1,0,0)$$

y su primera coordenada es siempre positiva, entonces Φ invierte orientación de T. Luego,

$$\iint_{T^{1ra\leq 0}} F.dS = -\iint_D F(0,y,z).(1,0,0)\, dydz = -\iint_D y^2\, dydz = (*).$$

En la expresión de la derecha ha quedado una integral doble sobre el disco D en el plano yz. A esto se le puede aplicar ahora un cambio de variables a coordenadas polares (porque ya es una integral doble, recordar que en una integral de superficie "jamás" se pone Jacobiano, pero una vez que está la integración en dos variables sí se puede, si es necesario).

$$\begin{cases} y = r\cos\theta \\ z = r\operatorname{sen}\theta \end{cases} \text{con} \begin{cases} 0 &\leq r \leq 2 \\ 0 &\leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

Entonces, por teorema de cambio de variables

$$(*) = -\int_0^2 \int_0^{2\pi} r^3 \cos\theta\, d\theta dr = -\int_0^2 \left[r^3 \operatorname{sen}\theta\right]_0^{2\pi} dr = 0.$$

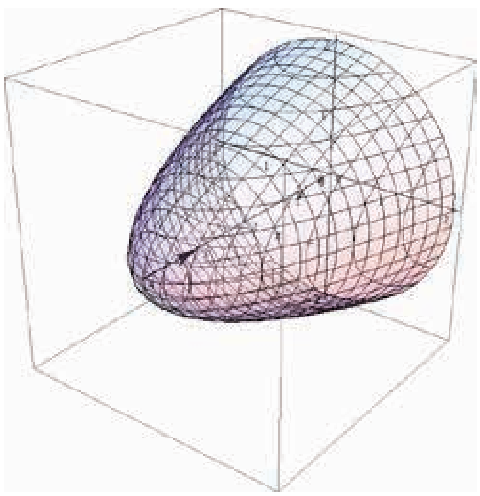
Con lo cual, queda

$$\iint_{S^{1ra\geq 0}} F.dS = \mathbf{1}) - \mathbf{2}) = 40\pi - 0 = 40\pi$$

y finalmente, el resultado que se busca es

$$\iint_{S^{1ra\leq 0}} F.dS = -40\pi.$$

Figura 8.5: Superficie $S = \{(x, y, z) : x = 4 - y^2 - z^2 , x \geq 0\}$ orientada



Ejemplo 8.1.9. Sea $F = (F_1, F_2, F_3)$ un campo vectorial $C^1(\mathbb{R}^3)$ y sea S la superficie del cono $z^2 = x^2 + y^2$, con $0 \leq z \leq 1$, orientada con normales tales que $N\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Si div$(F) = 3z^2$ y $F_3(x, y, 1) = x^2 + y^2$, calcular $\iint_S F.dS$.

Esta superficie se trata del cono hueco y sin tapa, con $0 \leq z \leq 1$, que no es una superficie cerrada. Si se considera la tapa circular $T = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, z = 1\right\}$, resulta que $S \cup T$ sí es cerrada, pues es borde del cono macizo

$$W = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z^2 , 0 \leq z \leq 1\right\}.$$

El problema principal consiste en que la función F no está dada explícitamente, sino que hay cierta información sobre ella, por eso no se puede integrar directamente sobre S. Conviene tal

vez plantear este ejemplo en términos del teorema de Gauss y ver si en algún momento se necesita esta información que, en principio, confunde y desorienta. Como el enunciado asegura que F es C^1 en el espacio, se tiene que

$$\iint_{(S\cup T)^+} F.dS \underbrace{=}_{\text{TG}} \iiint_W \text{div}(F)\, dV$$

por analogía con el caso anterior, teniendo en cuenta las orientaciones heredadas por $S \cup T$ de S y T se tiene finalmente que

$$\iint_{S^{3ra\leq 0}} F.dS = \underbrace{\iiint_W \text{div}(F)\, dV}_{\mathbf{1})} - \underbrace{\iint_{T^{3ra\geq 0}} F.dS}_{\mathbf{2})}.$$

La orientación pedida en este ejemplo para S es tal que en el punto $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ el vector normal unitario es $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, que tiene tercera coordenada negativa. Por lo tanto, la orientación pedida es opuesta a la heredada por el teorema.

1) W puede describirse mediante coordenadas cilíndricas, a saber:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases} \quad \text{con} \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ r = \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1. \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \iiint_W \text{div}(F)\, dV &= \iiint_W 3z^2\, dV = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_r^1 3z^2\, r\, dz d\theta dr \\ &= 2\pi \int_0^1 3r \left[\frac{z^3}{3}\right]_{z=r}^{z=1} dr = 2\pi \int_0^1 r(1-r^3)\, dr \\ &= 2\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^5}{5}\right]_0^1 = 2\pi \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right] = \frac{3}{5}\pi. \end{aligned}$$

2) $\Phi(x,y) = (x,y,1)$ con $(x,y) \in D$, disco unitario del plano real con centro en el origen, parametriza T. El producto cruz es

$$\begin{cases} \Phi_x = (1,0,0) \\ \Phi_z = (0,1,0) \end{cases} \Rightarrow \Phi_y \times \Phi_z = (0,0,1)$$

y como su tercera coordenada es positiva, Φ preserva la orientación heredada por el teorema de Gauss. Entonces,

$$\iint_{T^{3ra\geq 0}} F.dS = \iint_T F(x,y,1).(0,0,1)\, dS = \iint_D x^2 + y^2\, dxdy$$

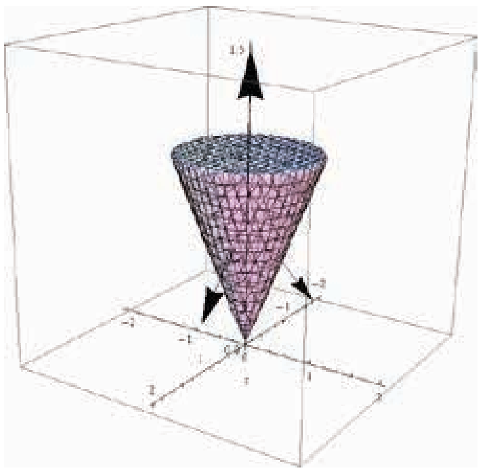
y esta integral doble puede ser calculada con cambio de variables a coordenadas polares del plano,

$$\iint_D x^2 + y^2\, dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 r\, drd\theta = 2\pi \frac{r^4}{4}\bigg|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Finalmente,

$$\iint_{S^{3ra \leq 0}} F.dS = \frac{3}{5}\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{11}{10}\pi.$$

Figura 8.6: Cono orientado $z^2 = x^2 + y^2$, con $0 \leq z \leq 1$, y tapa circular $x^2 + y^2 \leq 1$ con $z = 1$



Ejemplo 8.1.10. Se considera el sólido de la figura 8.4, limitado inferiormente por un cilindro con tapa inferior (pero no superior) de radio 1 y altura 2 y superiormente por la superficie simple regular S_0. Sabiendo que el volumen total del sólido es 8π, calcular el flujo del campo $F(x, y, z) = (x + y, x - y, z)$ a través de la superficie S_0 orientada con vectores normales hacia arriba.

Lo que se pide es $\iint_{S_0^{arriba}} F.dS$, pero se desconoce la descripción analítica de S_0, lo cual hace imposible que se calcule esta integral de manera directa. El dato tal vez más relevante, y a la vez intrigante porque no se sabe bien para qué sirve, es que el volumen del sólido total, W. Dicha región tiene como borde la unión de tres superficies bien identificadas:

- El cilindro circular hueco de altura 2 y radio 1, que se llamará S, sin tapa inferior ni superior. Como se ve en la figura 8.4, dicho cilindro tiene el eje de simetría en $(0, y_0, z)$,

con $y_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ fijo, además de que se encuentra apoyado en el plano $z = 0$. Por todo esto, se puede afirmar que el cilindro se puede describir como

$$S = \left\{(x, y, z) : \, x^2 + (y - y_0)^2 = 1 \, , \, 0 \leq z \leq 2\right\}.$$

- La tapa circular inferior, que se llamará T, se puede describir de la siguiente manera:

$$T = \left\{(x, y, z) : \, x^2 + (y - y_0)^2 \leq 1 \, , \, z = 0\right\}.$$

- La superficie S_0.

Entonces $S_0 \cup S \cup T$ es una superficie cerrada por ser frontera de W, que es una región unión de regiones elementales del espacio. Además, F es una función vectorial de tipo C^1 en el espacio. Por lo tanto, se puede aplicar el teorema de Gauss:

$$\iint_{(S_0 \cup S \cup T)^+} F.dS = \iiint_W \text{div}(F) \, dV.$$

Las orientaciones heredadas por la superficie cerrada en el teorema son las siguientes:

- S queda orientada con normales que no apuntan al eje de simetría del cilindro;
- T queda orientada con normales que apuntan hacia abajo, esto es, con tercera coordenada negativa;
- S_0 queda orientada con normales que apuntan hacia arriba, esto es, con tercera coordenada positiva.

Usando esta información anterior y la aditividad de las integrales de superficie queda que

$$\iint_{S_0^{3ra \geq 0}} F.dS + \iint_{S^{afuera}} F.dS + \iint_{T^{3ra. \leq 0}} F.dS = \iiint_W \text{div}(F) \, dV,$$

y por lo tanto, lo que se quiere calcular queda igualado a tres integrales:

$$\iint_{S_0^{3ra \geq 0}} F.dS = \underbrace{\iiint_W \text{div}(F) \, dV}_{\mathbf{1})} - \underbrace{\iint_{S^{afuera}} F.dS}_{\mathbf{2})} - \underbrace{\iint_{T^{3ra. \leq 0}} F.dS}_{\mathbf{3})}$$

1) La divergencia es:

$$\text{div}(F) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 1 - 1 + 1 = 1,$$

Con lo cual

$$\iiint_W \text{div}(F) \, dV = \iiint_W 1 \, dV = \text{Vol}(W) = 8\pi.$$

y en este punto es cuando se tuvo que utilizar el dato del volumen que desorientaba un poco.

2) Como tiene radio 1 fijo, altura 2 y está desplazado en y, al cilindro hueco S se lo puede parametrizar de la siguiente manera:

$$\Phi(\theta, z) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta + y_0, z),$$

con $(\theta, z) \in [0, 2\pi] \times [0, 2]$. Antes de integrar, hay que fijarse si esta parametrización preserva la orientación que tiene heredada S:

$$\begin{cases} \Phi_\theta &= (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0) \\ \Phi_z &= (0, 0, 1) \end{cases} \Rightarrow \Phi_\theta \times \Phi_z = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0).$$

Para ver si preserva conviene fijar el ángulo $\theta = \pi/2$. Todos los puntos de la forma $\Phi(\pi/2, z)$ se encuentran en la recta $(0, 1 + y_0, z)$, pues $\Phi(\pi/2, z) = (0, 1 + y_0, z)$. En estos puntos, el vector normal $(\Phi_\theta \times \Phi_z)$ toma los siguientes valores:

$$(\Phi_\theta \times \Phi_z)(\pi/2, z) = (0, 1, 0)$$

y si se grafica esta situación (ver figura 8.8) se puede notar que el normal en esos puntos apunta en el sentido de la orientación de S, pues pinchados en cada punto apuntan en contra del eje de simetría del cilindro. Por lo tanto, al tratarse de una parametrización regular y de una superficie orientable, Φ preserva orientación de S. Con esto,

$$\begin{aligned}
\iint_{S^{afuera}} F.dS &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (\cos\theta + \operatorname{sen}\theta + y_0, \cos\theta - \operatorname{sen}\theta - y_0, z). \\
&\quad (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)\, dz d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + y_0(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta) \\
&\quad + \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\, dz d\theta \\
&= 2\int_0^{2\pi} 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + y_0(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta) \\
&\quad + \underbrace{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta}_{\cos(\theta+\theta)}\, dz d\theta \\
&= 2\left[\operatorname{sen}^2\theta + y_0(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta) + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 0.
\end{aligned}$$

3) El disco T se puede parametrizar con $\Psi(x, y) = (x, y, 0)$ con (x, y) tales que $x^2 + (y - y_0)^2 \leq 1$. El vector normal es $\Psi_x \times \Psi_y = (0, 0, 1)$, por lo que Ψ invierte orientación, ya que la tercera coordenada es siempre positiva. Entonces, si D es el dominio de la parametrización, se tiene que

$$\iint_{T^{3ra.\leq 0}} F.dS = -\iint_D (x + y, x - y, 0).(0, 0, 1)\, dx dy = 0.$$

Finalmente, queda lo siguiente

$$\iint_{S_0^{3ra \geq 0}} F.dS = 1) - 2) - 3) = 8\pi - 0 - 0 = 8\pi.$$

Figura 8.7: Cilindro macizo con tapa inferior de radio 1 y altura 2 y con tapa superior S_0, simple y regular

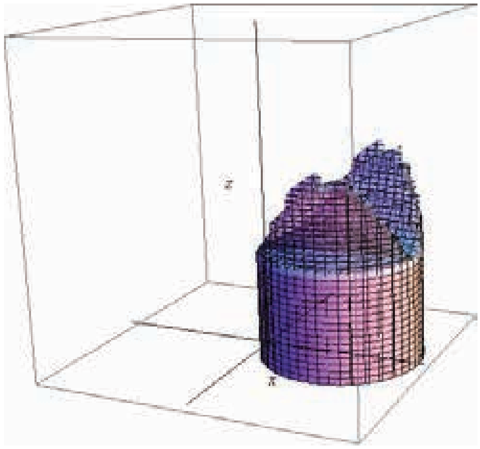
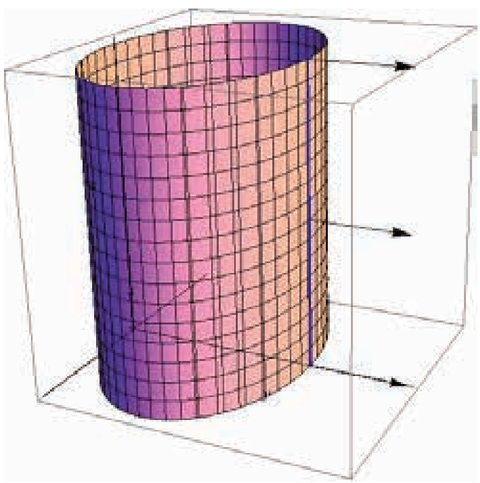


Figura 8.8: Puntos del cilindro S de la forma $\Phi(\pi/2, z)$ y su normal $(0, 1, 0)$



8.2. Práctica

1) Calcular el flujo del campo $F(x, y, z) = (y + 2z, 2x - z, 3y + x)$ a través de la superficie frontera del cubo $[-1, 3] \times [0, 1] \times [-2, 1]$ orientado con sus vectores normales apuntado hacia afuera.

2) Calcular el flujo de $F(x, y, z) = (xy, x^8 z^5, \cos(y \operatorname{sen}(x)))$ a través de la superficie frontera de cuerpo definido por $x^2 + z^2 \leq 2$, $z \leq x$, $y \leq 3$ en el primer octante, orientada con un campo de vectores normales tal que $N(1/2, 3, 1/2) = (0, -1, 0)$.

3) Calcular el flujo de ∇U a través de la frontera del cuerpo limitado por $z \leq 6$, $z \geq x+2y$ en el primer octante, con vector normal unitario entrante, cuando $U(x, y, z) = xy - z^2 + 2xz$.

4) Calcular el flujo de $F(x, y, z) = (e^{y^2} z^2, yz, xy^2 z)$ a través de la superficie $z^2 + y^2 = 4$, $0 \leq x \leq 3$ orientada según el campo de vectores normales que apunta hacia el eje x.

Capítulo 9

Teorema de Stokes

9.1. Introducción

Definición 9.1.1. *El* ***rotor*** *de una función $F : A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial definido por*

$$\begin{aligned} rot(F) &= \nabla \times F := det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix} \\ &= ((F_3)_y - (F_2)_z, (F_1)_z - (F_3)_x, (F_2)_x - (F_1)_y), \end{aligned} \tag{9.1.1}$$

siendo $F(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z)) = (F_1, F_2, F_3)$ y los subíndices x, y, z denotan a las derivadas parciales de las coordenadas F_i de F.

Teorema 9.1.2. *Sea C una curva cerrada y orientada, frontera de una superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ orientable. Si $F : A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$un campo C^1 en todo S, entonces,*

$$\int_{C^{or}} F.ds = \iint_{S^{ind}} rot(F).dS, \tag{9.1.2}$$

con la orientación de S inducida por la de la curva C, en el sentido de que al caminar por C, S debe quedar siempre de la izquierda (o también puede verse con la regla de la mano derecha: si se cierra la mano derecha siguiendo el sentido de la orientación de C, el dedo pulgar quedará indicando el sentido de los vectores normales de la superficie S).

Una observación muy importante es el hecho de que este teorema vale para cualquier superficie que tenga como borde a la curva en cuestión. Por ejemplo, para el caso de la curva $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = 1\}$, podemos notar que

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z, z \leq 1\}$$

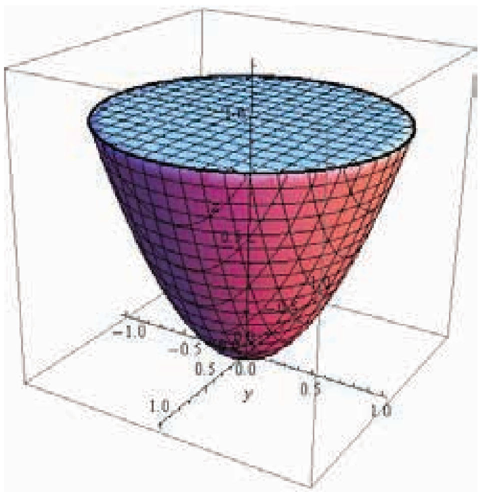
y

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = 1\}$$

son dos superficies orientables distintas (una es un paraboloide y otra un disco) que la tienen como borde. Si se aplica el teorema de Stokes sobre cada una de ellas, teniendo una F que sea C^1, entonces,

$$\iint_{S_1^{ind}} \text{rot}(F).dS = \int_{C^{or}} F.ds = \iint_{S_2^{ind}} \text{rot}(F).dS.$$

Figura 9.1: Superficies S_1 y S_2 que tienen como borde a la curva $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$



Ejemplo 9.1.3. Sea C la curva dada por la intersección de las superficies $y^2 + z^2 = 1$ y $x + y = 2$, con orientación antihoraria vista desde el origen. Si $F(x, y, z) = \left(z, e^{\operatorname{sen} y}, e^{z^4} - x\right)$, calcular la circulación de F a lo largo de C.

Para resolver esto, primero se puede realizar un gráfico de la curva C, que es una elipse en el plano $x + y = 2$, dado que es la intersección entre dicho plano y el cilindro $y^2 + z^2 = 1$. La circulación del campo F a lo largo de C está dada por la integral de línea:

$$\int_{C^{or}} F\,.ds.$$

Esta integral se puede plantear porque no resulta difícil parametrizar la curva (por ejemplo, con la función $\sigma(t) = (2 - \cos t, \cos t, \operatorname{sen} t)$, con $0 \leq t \leq 2\pi$), pero no se puede resolver simplemente porque quedan para calcular algunas primitivas que se desconocen. Por lo tanto, se puede ver si se está en condiciones de aplicar el teorema de Stokes, pues este relaciona una integral de línea sobre una curva cerrada con una de superficie.

1) C es curva cerrada y es borde, por ejemplo, de la superficie

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x + y = 2 \; \wedge y^2 + z^2 \leq 1\right\},$$

que es la superficie elíptica.

2) F es un campo C^1 en S, pues cada componente es una función C^1 en S (más aún, F es C^1 en todo el espacio).

Con estas hipótesis cumplidas se está en la condiciones del teorema de Stokes, así que:

$$\int_{C^{or}} F \, .ds = \iint_{S^{ind}} \text{rot}(F).dS,$$

donde el término de la izquierda es la circulación del campo F a lo largo de C (lo que se pide y que es difícil de calcular). La orientación de la superficie S inducida por la de la curva C es, por regla de la mano derecha, tal que la primera coordenada del vector normal a S sea positiva.

Se calcula, entonces, la integral del término de la derecha, esperando que sea más simple que la de la izquierda. Para ello:

1) Se busca una parametrización de S: si el cilindro $y^2 + z^2 \leq 1$ se parametriza con

$$y = r\cos\theta$$

$$z = r\,\text{sen}\,\theta$$

con $(r, \theta) \in D := [0, 1] \times [0, 2\pi]$, y

$$x = 2 - y = 2 - r.cos\,\theta.$$

Entonces, $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$, dada por $\Phi(r, \theta) = (2 - r\cos\;\theta, r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)$ es parametrización de S.

2) Con esta parametrización, el vector normal es

$$\Phi_r \times \Phi_\theta = (r, r, 0)\,.$$

Como $r \geq 0$, tenemos que la primera coordenada es mayor o igual que 0, entonces Φ invierte orientación.

3) El rotor de F, por (9.1.1) se calcula como:

$$\text{rot}(F) = \nabla \times F := det\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix} = (0 - 0, 1 + 1, 0 - 0) = (0, 2, 0).$$

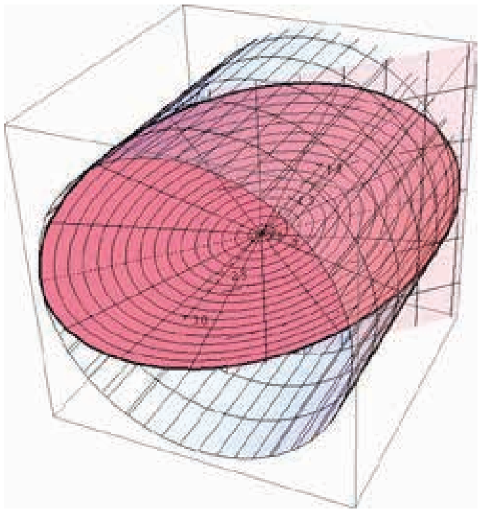
Con todo lo anterior,

$$\iint_{S^{ind}} \text{rot}(F).dS = \underbrace{-}_{\Phi \text{ inv.}} \iint_D (0, 2, 0).(r, r, 0)\,dr\,d\theta = -\int_0^{2\pi}\int_0^1 2r\,dr\,d\theta = -2\pi.$$

Por lo tanto,

$$\int_{C^{or}} F\,.ds = -2\pi.$$

Figura 9.2: Curva determinada por la condiciones $y^2 + z^2 = 1$ y $x + y = 2$



Ejemplo 9.1.4. Determinar si es posible aplicar el teorema de Stokes para calcular la circulación del campo $F(x, y, z) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, z\right)$ a lo largo de los bordes de las superficies:

1) S la región del plano $z = 0$ que verifica $x^2 + y^2 \leq 1$ y $x + y \geq 1$.

2) S el círculo $x^2 + y^2 \leq 1$ en el plano $z = 0$

En cada caso, calcular la circulación de F a lo largo de C, de modo tal que la curva en cuestión esté orientada de forma antihoraria vista desde el eje positivo de las z.

La circulación de F a través de una curva C orientada está dada por la integral de línea

$$\int_C F.ds.$$

1) En este caso, la superficie se trata de una porción del disco unitario, cortada por una recta que no pasa por el centro de dicho disco (ver figura 9.3). La curva borde C de esta superficie es la unión del cuarto de arco de la circunferencia unitaria y el segmento de $x + y = 1, z = 0$ con $0 \leq x \leq 1$. Se puede ver si se cumplen las hipótesis del teorema de Stokes:

- C es cerrada por definición, simple y está orientada;
- S es superficie orientable;

- F es un campo C^1 siempre y cuando $(x, y, z) \neq (0, 0, z)$, es decir, siempre que x e y no sean simultáneamente 0. De hecho, F ni siquiera se encuentra definida en $(0, 0, z)$, pues es en donde el denominador del cociente que hay en las primera dos componentes se anula. Esto ocurre en todo el eje z, pero este no tiene intersección con S, de modo que F está definida y donde lo esté será C^1.

Con esto, se puede plantear la igualdad del teorema de Stokes

$$\int_C F.ds = \underbrace{\iint_{S^{ind}} \text{rot}(F).dS}_{(1)}.$$

Entonces, se calcula (1):

$$\text{rot}(F) = \nabla \times F := det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & z \end{pmatrix}$$

$$= \left(0 - 0, 0 - 0, \frac{2(x^2+y^2) - 2(x^2+y^2)}{x^+y^2}\right) = (0, 0, 0).$$

Por lo tanto,

$$\int_C F.ds = \iint_{S^{ind}} (0, 0, 0).dS = 0.$$

2) Como se observó en el primer ítem, la función F no está definida en el eje z, que en este caso tiene el punto $(0, 0, 0)$ de intersección con el disco unitario S. De modo que F no puede ser C^1 en S y no valdría el teorema. Si se buscara otra superficie orientable que tenga a la circunferencia C de borde siempre se tendría al menos un punto $(0, 0, z)$ que pertenecería a ella (y esto se puede visualizar gráficamente). La única opción que queda es calcular la integral de manera directa: $\sigma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$ es parametrización de C tal que

$$\begin{cases} \sigma(0) & = (1, 0, 0) \\ \sigma(\pi/2) & = (0, 1, 0) \\ \sigma'(t) & = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0) \neq (0, 0, 0), \end{cases}$$

lo cual dice que σ preserva orientación de C. Entonces,

$$\begin{aligned} int_C\, F.ds &= \int_0^{2\pi} \underbrace{(-\operatorname{sen} t, \cos t, 0)}_{=F(\sigma(t))} . \underbrace{(-\operatorname{sen} t, \cos t, 0)}_{=\sigma'(t)}\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \underbrace{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}_{=1}\, dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Se puede observar que esta integral es no nula. Si se calculara $\iint_S$ rot$(F).dS$, esta daría 0 al ser el rotor nulo, por lo cual se pone en evidencia que al no cumplirse las hipótesis, la igualdad del teorema de Stokes puede no cumplirse. O sea que para calcular la integral de línea no se puede utilizar dicho teorema.

Figura 9.3: Región S plana $x^2 + y^2 \leq 1$ y $x + y \geq 1$, con su curva frontera

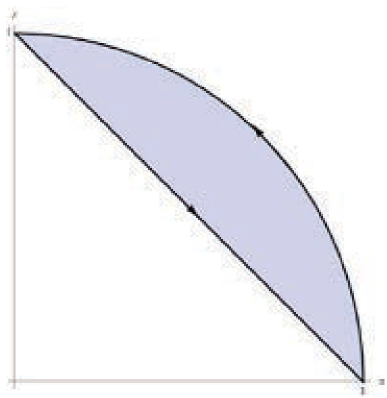
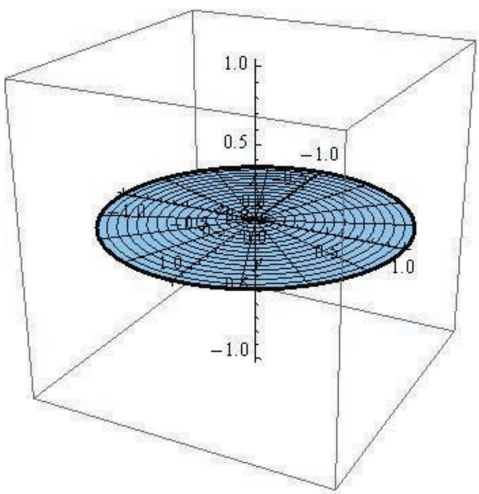


Figura 9.4: Curva C, frontera de $x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$



Ejemplo 9.1.5. Calcular la integral de línea de $F(x, y, z) = (2y + e^{x^2}, xz + e^{y^2}, xy + e^{z^2})$

a lo largo de la curva frontera de $x+y+z=2$, en el primer octante con $z \geq x+y$ recorrida positivamente si se la observa desde el eje positivo z.

En primer lugar, para saber cómo es la superficie S y su borde C, se debe tener en cuenta de que $x+y+z=2$ es una plano que pasa por los puntos $(2,0,0)$, $(0,2,0)$ y $(0,0,2)$. La condición del primer octante limita a que sea una porción triangular de ese plano. La condición $z \geq x+y$ es un semiespacio determinado por el plano $z=x+y$, aquel que tiene al punto $(0,0,2)$ (pues verifica la desigualdad estricta). Si se igualan las dos ecuaciones de los planos $z=x+y$ y $x+y+z=2$ se obtiene lo siguiente:

$$\begin{cases} z &= x+y \wedge x+y+z=2 \Rightarrow 2z=2 \Rightarrow z=1 \\ z &= 1 \wedge z=x+y \Rightarrow x+y=1. \end{cases}$$

Lo cual dice que la intersección entre los dos planos es el segmento $x+y=1$ en $z=1$. De este modo, S queda graficada como en la figura 9.5a. Su sombra en el plano xy es el triángulo D, que se puede describir como

$$\begin{cases} 0 &\leq x \leq 1 \\ 0 &\leq y \leq 1-x. \end{cases}$$

Esto servirá si es necesario parametrizar a S. Por otro lado, se puede ver con cierta simpleza que se cumplen las hipótesis del teorema de Stokes:

- C es curva frontera de S, así que es cerrada;
- S es superficie simple y regular, orientable;
- F es C^1 en $\mathbb{R}^3$.

Por lo tanto,

$$\int_C F.ds \underbrace{=}_{\text{TS}} \iint_{S^{ind}} \text{rot}(F).dS.$$

La orientación inducida por C de S, por regla de la mano derecha es con normales apuntando hacia arriba, es decir, con tercera coordenada positiva.

Se calcula el rotor:

$$\text{rot}(F) = \nabla \times F := det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy+e^{x^2} & zx+e^{y^2} & zy+e^{z^2} \end{pmatrix} = (z-x, 0, z-x)\,,$$

y una parametrización de S es:

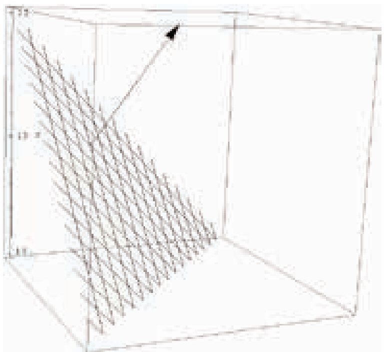
$$\Phi(x,y) = (x, y, 2-x-y),$$

con $(x,y) \in D$.

$$\begin{cases} \Phi_x = (1,0,-1) \\ \Phi_y = (0,1,-1) \end{cases} \Rightarrow \Phi_x \times \Phi_y = (1,1,1).$$

Figura 9.5: Superficie $x+y+z=2$, en el primer octante con $z \geq x+y$, su sombra en $z=0$ y su orientación inducida

(a) S



(b) Sombra en el plano $z=0$



Como la tercera coordenada es constantemente $1>0$, se deduce que Φ preserva orientación de S (la inducida). Con esto,

$$\begin{aligned}
\int_C F.ds &= \iint_{S^{3ra.\geq 0}} (z-x,0,z-x).dS \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} (2-2x-y,0,2-2x-y).(1,1,1)\, dydx \\
&= 2\int_0^1 \int_0^{1-x} 2-2x-y\, dydx = 2\int_0^1 \left[2y-2xy-\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1-x} dx \\
&= \int_0^1 \frac{5x^2-6x+3}{2}\, dx = 2\left[\frac{5}{6}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}x\right]_0^1 = \frac{5}{3}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 9.1.6. Calcular la integral del campo

$$F(x,y,z) = \left(2y+\ln(x^2+1), xz-\ln(\text{sen}^y), xy+\frac{1}{z^2+1}\right)$$

a lo largo de la curva C imagen de $\alpha(t)=(2\cos t, 3-2\cos t, 2\,\text{sen}\, t), 0 \leq t \leq 2\pi$.

Si bien se tiene la curva caracterizada vía una parametrización, al plantear la integral de campo por definición queda una integral imposible de calcular. Por lo que habrá que ver si se puede aplicar el teorema de Stokes nuevamente.

- A pesar de que C no está dada de manera explícita, se puede intentar graficar a partir de la parametrización dada, ya que $C=Im(\alpha)$. Se tiene que si $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ es un

punto de la curva, debe cumplir que

$$\begin{cases} x &= 2\cos\theta \\ y &= 3 - 2\cos\theta \\ z &= 2\operatorname{sen}\theta. \end{cases}$$

Con esto se puede ver que esos $(x, y, z) \in C$ cumplen también

$$x^2 + z^2 = (2\cos\theta)^2 + (2\operatorname{sen}\theta)^2 = 4,$$

$$y = 3 - 2\cos\theta = 3 - x.$$

Lo cual termina definiendo a C como una elipse en el plano $y = 3 - x$ de sombra $x^2 + z^2 = 4$ en el plano xz. Esto se puede ver en la figura 9.6.

- Esta curva es frontera de la superficie elíptica S, definida como

$$S = \left\{(x, y, z) : \, x^2 + z^2 \leq 4 \, , \, y = 3 - x\right\}.$$

- ¿Se sabe algo acerca de la orientación de la curva? Sí, pues al definirla como imagen de una parametrización dada, se supone que su orientación es la misma en la que recorre α a C. De modo que, si

$$\begin{cases} \alpha(0) &= (2, 1, 0) \\ \alpha(\pi/2) &= (0, 3, 2) \\ \alpha' &\neq (0, 0, 0), \end{cases}$$

se puede afirmar que C está orientada horariamente vista desde el eje positivo y (o, lo que lo mismo, antihorario visto desde el origen, la forma en que se explica puede diferir, pero la orientación es la misma).

- F es C^1 en S, pues ni el logaritmo ni el cociente tienen ningún tipo de problema.

Por lo tanto, el teorema de Stokes afirma que

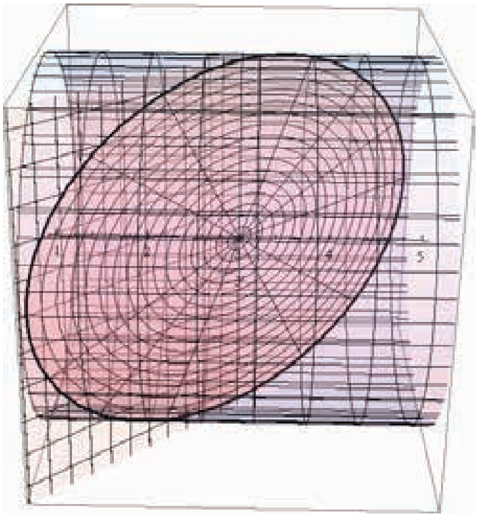
$$\int_C F.ds = \iint_{S^{ind}} \text{rot}(F).dS,$$

donde la orientación de S inducida por C es, por regla de la mano derecha (recordar: cerrar a palma de la mano derecha en el sentido de orientación de la curva, dejando el dedo pulgar como señalador de la orientación de los vectores normales de S), tal que la segunda coordenada del vector normal sea negativa. Si

$$\text{rot}(F) = det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2y + \ln(x^2+1) & zx - \ln(\operatorname{sen}^2 y) & xy + \dfrac{1}{z^2+1} \end{pmatrix}$$

$$= (x - x, 0 - y, z - 2) = (0, -y, z - 2)$$

Figura 9.6: Curva C imagen de $\alpha(t) = (2\cos t, 3 - 2\cos t, 2\,\mathrm{sen}\, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$



y una parametrización de S es

$$\Phi(x, y) = (x, 3 - x, z),$$

con $(x, y) \in D = \big\{(x, y) :\ x^2 + z^2 \leq 4\big\}$. El vector normal se calcula:

$$\left\{ \begin{array}{c} \Phi_x = (1, -1, 0) \\ \Phi_z = (0, 0, 1) \end{array} \right. \quad \Rightarrow \Phi_x \times \Phi_z = (-1, -1, 0)$$

y, como la segunda coordenada de este último vector es siempre negativa, resulta que Φ preserva la orientación inducida de S. Luego,

$$\begin{aligned} \int_C F.ds &= \iint_{S^{2da.\leq 0}} (0, 3 - x, z - 2).dS \\ &= \iint_D (0, 3 - x, z - 2).(-1, -1, 0)\, dxdz \\ &= \iint_D x - 3\, dxdz. \end{aligned}$$

D es un disco del plano y se trata de calcular ahora una integral doble sobre él, si se aplica el cambio de variables a coordenadas polares

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ z = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{array} \right. \quad \text{con} \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \leq r \leq 2 \\ 0 & \leq \theta \leq 2\pi, \end{array} \right.$$

queda que

$$\iint_D x - 3\,dxdz \underbrace{=}_{\text{TCV}} \int_0^2 \int_0^{2\pi} (r\cos\theta - 3) \underbrace{r}_{J(r,\theta)} \,d\theta dr = -3\pi r^2\Big|_0^2 = -12\pi.$$

Ejemplo 9.1.7. Sean $F(x, y, z) = (y + z, z + x, x + y)$ y C la circunferencia intersección de $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ y con el plano $x + y + z = 0$ orientada en el con el sentido $(1, 0, -1)$, $(0, 1, -1)$, $(-1, 0, 1)$. Calcular la circulación del F campo F a lo largo de C.

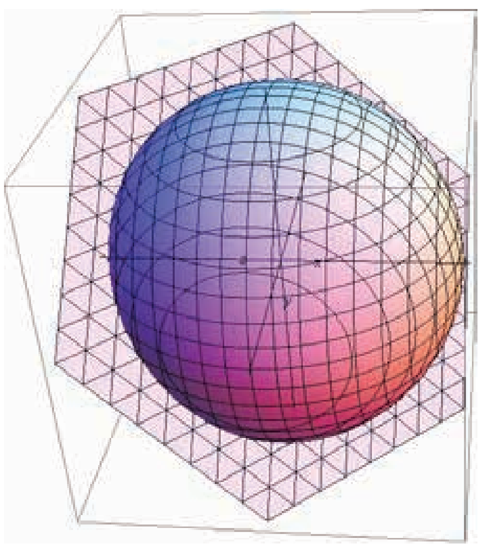
En este caso, C es una circunferencia de radio $\sqrt{2}$ en el plano $x + y + z = 0$, ya que este plano corta a la esfera unitaria pasando por su centro $(0, 0, 0)$ (ver figura 9.7). No resulta una curva fácil de parametrizar (pero tampoco es muy difícil). Pero si se considera el disco del cual esta curva es borde, como F es C^1 en todo el espacio, se tiene que la circulación de F a lo largo de C es igual a

$$\iint_{S^{ind}} \text{rot}(F).dS$$

y al calcular el rotor de F este da 0. Por lo cual,

$$\int_C F.ds = 0.$$

Figura 9.7: Circunferencia intersección de $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ y con el plano $x + y + z = 0$



Ejemplo 9.1.8. ¿Cuál es la circulación del campo F a lo largo de la curva C si

$$F(x, y, z) = \left(e^{x^2} - x^2, y + y^7 + \ln(y-2), 2x - \ln(z^2+1)\right)$$

y C es la curva intersección de las superficies $y = 4 - x^2 - z^2$ e $y = x^2 + z^2 + 2$ si C está orientada en el sentido $(1, 3, 0)$, $(0, 3, 1)$, $(-1, 3, 0)$?

La circulación del campo F a lo largo de C está dada por la integral de línea $\int_C F.ds$, con la curva orientada como se pide. Esta curva es la intersección de dos superficies, que son justamente dos paraboloides que tienen a y como eje de simetría. Al cumplir esto, sumado al hecho de que se trata de dos paraboloides circulares, se esperaría que la curva intersección fuera una circunferencia (ver figura 9.8). Esto se puede corroborar analíticamente igualando las expresiones que describen a ambas superficies:

$$\begin{cases} y = 4 - x^2 - z^2 \\ y = x^2 + z^2 + 2 \end{cases} \Rightarrow y = 4 - (y-2) \Rightarrow y = 3 \Rightarrow 1 = x^2 + z^2.$$

Es decir que C es la circunferencia unitaria $x^2 + z^2 = 1$ en el plano $y = 1$. Al considerar su orientación según en el enunciado se puede advertir que esta es equivalente a decir que C está orientada antihorariamente vista desde el origen.

Si se quiere aplicar el teorema de Stokes, hay que fijarse que la curva en cuestión sea cerrada. Como, efectivamente lo es, hay que decir de qué superficie es borde: en este caso están los dos paraboloides pero acotados, $y = 4 - x^2 - z^2$, con $3 \leq y \leq 4$, y $y = x^2 + z^2 + 2$, con $0 \leq y \leq 2$; además está el disco unitario $x^2 + y^{\leq} 1$, con $y = 3$. Desde ya que conviene tomar la superficie más simple, que en este caso se trata del disco, porque es una región plana, pero hay otra razón adicional: el campo F solo está definido para (x, y, z) con $y > 2$, pues en su segunda componente aparece $\ln(y-2)$, lo cual hace que no se pueda tomar el paraboloide $y = x^2 + z^2 + 2$, con $0 \leq y \leq 2$, ya que este tiene su vértice con $y = 2$ y allí F no puede ser C^1.

Por lo tanto, si se toma a $S = \left\{(x, y, z) : x^2 + z^2 \leq 1 \, , \, y = 3\right\}$ y se aplica el teorema de Stokes, queda:

$$\int_C F.ds = \iint_{S^{or}} \text{rot}(F).dS,$$

con S orientada con normales con segunda coordenada negativa (se sugiere al lector controlar esta orientación inducida).

$$\text{rot}(F) = det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^{x^2} - x^2 & y + y^7 + \ln(y-2) & 2x - \ln(z^2+1) \end{pmatrix} = (0, -2, 0)\,.$$

En lugar de buscar una parametrización Φ de S y luego controlar si Φ preserva o no su orientación, se hará lo que se planteó en la observación 5.4.14. Como S es una superficie que se encuentra en el plano $y = 3$, tiene normales constantes. Un vector normal de S que apunte en

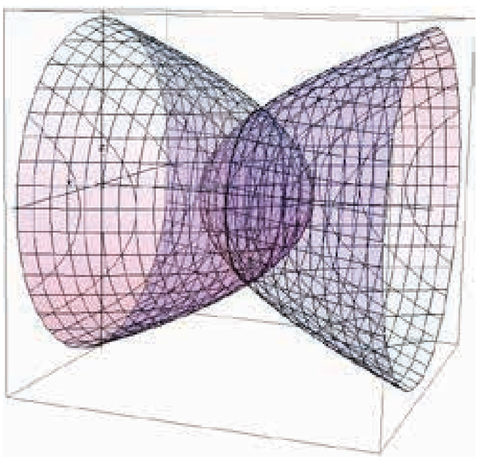
el sentido inducido, o sea, con segunda coordenada negativa, es $(0,-1,0)$, de modo que

$$\begin{aligned}\iint_{S^{2da.}\leq 0} \text{rot}(F).dS &= \iint_S \text{rot}(F).(0,-1,0)\, dS \\ &= \iint_S 2\, dS = 2\iint_S 1\, dS = 2\, A(S).\end{aligned}$$

Pero S es un disco de radio 1, del cual se conoce su área por la fórmula $\pi\,\text{radio}^2$. Entonces,

$$\int_C F.ds = 2\, A(S) = 2\pi.$$

Figura 9.8: Curva intersección de las superficies $y = 4 - x^2 - z^2$ e $y = x^2 + z^2 + 2$



Ejemplo 9.1.9. Calcular la circulación de $F(x,y,z) = (z + e^{x^2}, x - \ln(1+y^2), 0)$ a lo largo de la curva intersección de las superficies $x^2 + y^2 = 2$, $y = \sqrt{x^2 + 2z^2}$ orientada en sentido horario visto desde el origen del sistema de coordenadas.

La superficie $x^2 + y^2 = 2$ es un cilindro no acotado de radio $\sqrt{2}$ con eje de simetría $(0,0,z)$. La expresión $y = \sqrt{x^2 + 2z^2}$ resulta equivalente a $y^2 = x^2 + 2z^2$ con $y \geq 0$, lo cual deja más en evidencia que se trata de un cono elíptico con eje de simetría $(0,y,0)$. La curva C intersección no se trata de un curva plana (ver figura 9.9), pero se trata de una elipse curva. Su sombra en el plano xz se puede obtener a partir de la igualación de las expresiones que describen a las superficies:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 &= 2 \\ \quad y &= \sqrt{x^2 + 2z^2} \end{cases} \Rightarrow x^2 + x^2 + 2z^2 = 2 \Rightarrow 1 = x^2 + z^2.$$

Así que la sombra es el disco unitario. Para aplicar el teorema de Stokes, hay que mencionar las siguientes cuestiones.

- C es curva frontera de la superficie elíptica que se encuentra en el cilindro $x^2+y^2=2$, que se puede describir como $S=\left\{(x,y,z):\, x^2+y^2=2\,,\, x^2+z^2\leq 1\right\}$. Es decir, S está en el cilindro ese y su sombra es el disco $x^2+z^2\leq 1$ en el plano xz;
- F es un campo C^1 en el espacio;
- la orientación de la curva C induce una orientación en S, tal que sus vectores normales tienen segunda coordenada positiva.

Con esto,

$$\int_C F.ds \underbrace{=}_{\text{TS}} \iint_{S^{or}} \text{rot}(F).dS.$$

Se calcula el rotor:

$$\text{rot}(F) = det\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z+e^{x^2} & x+\ln(1+y^2) & 0 \end{pmatrix} = (0,1,1)$$

Y se busca una parametrización de S, que puede pensarse como

$$\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, y(r,\theta), r\,\text{sen}\,\theta)\,,$$

con $(r,\theta)\in[0,1]\times[0,2\pi]$. El dominio de la parametrización surge del hecho de describir al disco unitario que es sombra de la región en el plano xz. La única cuestión es decidir cómo será $y(r,\theta)$: al describir S se mencionó que esta superficie se encontraba en el cilindro $x^2+y^2=2$. Como en este caso $y\geq 0$, se puede despejar a y en función de $x=r\cos\theta$, quedando

$$y=\sqrt{2-(r\cos\theta)^2}.$$

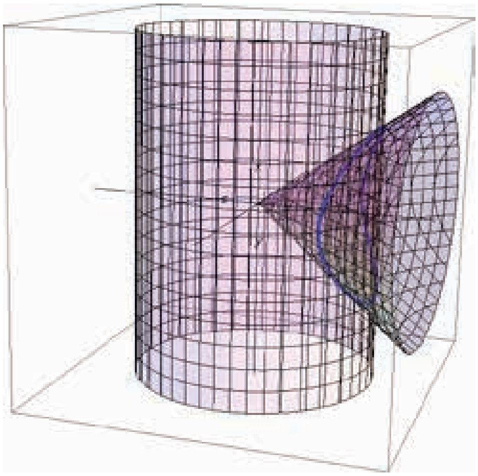
Ahora se calcula el vector producto cruz de las derivadas parciales y se corrobora la orientación de la parametrización:

$$\begin{cases} \Phi_r &= \left(\cos\theta, \dfrac{-r\cos^2\theta}{\sqrt{2-r^2\cos^2\theta}}, \text{sen}\,\theta\right) \\ \Phi_\theta &= \left(-r\,\text{sen}\,\theta, \dfrac{r^2\cos\theta\,\,\text{sen}\,\theta}{\sqrt{2-r^2\cos^2\theta}}, r\cos\theta\right) \end{cases} \Rightarrow \Phi_r\times\Phi_\theta = (*,-r,0).$$

El asterisco en la primera coordenada es porque el rotor tiene la primera coordenada nula, cuando se haga el producto escalar, este anulará a la primera componente de $\Phi_r\times\Phi_\theta$ así que realmente no importa cuánto vale en esa coordenada. Para ver el tema de la orientación se puede notar que la segunda coordenada es siempre negativa porque $r\geq 0$, así que Φ invierte orientación de S. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \iint_{S^{or}} \text{rot}(F).dS &= -\iint_D (0,1,1).(*,-r,0)\,drd\theta \\ &= -\int_0^1\int_0^{2\pi} -r\,d\theta dr = 2\pi\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 = \pi. \end{aligned}$$

Figura 9.9: Curva intersección de las superficies $x^2 + y^2 = 2$ e $y = \sqrt{x^2 + 2z^2}$



9.2. Práctica

1) Sea F un campo C^2 en $\mathbb{R}^3$ y S una superficie cerrada. Demostrar que el flujo de rot$F$ a través de S es nulo.

2) Comprobar que se verifica el teorema de Stokes en el caso $F(x, y, z) = (3y, -xz, yz^2)$ y S la superficie $z = (x^2+y^2)/2, z \leq 4$. Indicar en un gráfico claramente cómo orienta a la superficie S y a su borde.

3) Determinar si es posible aplicar el teorema de Stokes para calcular la circulación del campo $F(x, y, z) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\ ,\ \frac{x}{x^2+y^2}\ ,\ z\right)$ a lo largo de los bordes de las superficies:

  1) S la región del plano $z = 0$ que verifica $x^2 + y^2 \leq 4$ y $x + y \geq 4$.

  2) S el círculo $x^2 + y^2 \leq 4$ en el plano $z = 0$.

En cada caso, determinar la circulación de F a lo largo de las curvas indicadas y el flujo de rot$F$ a través de las superficies dadas.

4) Mediante una aplicación conveniente del teorema de Stokes, calcular la circulación de los siguientes campos a lo largo de las curvas indicadas.

1) $F(x, y, z) = (2y, xz, xy)$ a lo largo de la curva C imagen de $\alpha(t) = (4\cos t, 2, 4\operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

2) $F(x, y, z) = (xy, zx, zy)$ a lo largo de la curva frontera de $x + y + z = 2$, en el primer octante con $z \geq x + y$ recorrida positivamente si se la observa desde el eje positivo z.

5) Calcular la circulación de $F(x, y, z) = (\ln(1 + x^2), x - y, z - y)$ a lo largo de la curva borde de la superficie $z = x^2, y \leq x, z \leq 4$ en el primer octante orientada en el sentido $(2, 0, 4), (0, 0, 0), (2, 2, 4)$.

6) Sean $F(x, y, z) = (y, -x, zx^3y^2)$ y S la superficie dada por $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \leq 0$ orientada con vectores normales hacia arriba. Calcular $\iint_S \nabla \times F$.

7) Sea C la curva definida por la trayectoria $\alpha(t) = \begin{cases} (t, t^2, 0) & \text{si } t \in [0, 1] \\ (2 - t, 2 - t, 0) & \text{si } t \in [1, 2] \end{cases}$

1) ¿α es una parametrización de C?

2) Consideremos a C orientada por α, ¿cuánto vale la circulación de F a lo largo de C si F es un campo vectorial C^1 que verifica rot$F(x, y, z) = (-x, 0, z - x)$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$?

8) ¿Cuál es la circulación del campo F a lo largo de la curva C si rot$F(x, y, z) = (-x^2, y, 2xz - z)$ y C es la curva intersección de las superficies $z = 4 - x^2 - y^2$ y $z = x^2 + y^2 + 2$ si C está orientada en el sentido $(1, 0, 3), (0, -1, 3), (-1, 0, 3)$?

9) Calcular la circulación de $F(x, y, z) = (y^3 + \operatorname{sen} x, \cos^5 y, \operatorname{arc\,tg} z + x^3)$ a lo largo de la curva C parametrizada y orientada por $\alpha(t) = (2\cos t, \operatorname{sen} t, 5 - 2\cos t - \operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Parte IV

Apéndice

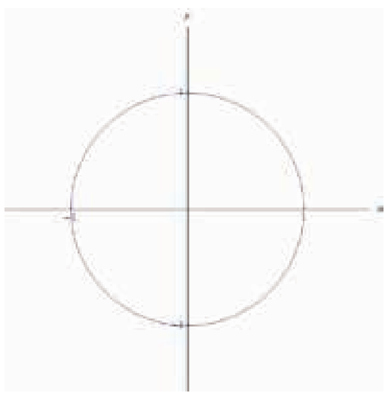
Apéndice A

Curvas planas especiales

A.1. Circunferencias

Asumiendo la identidad trigonométrica $\cos^2(t) + \operatorname{sen}^2(t) = 1$ y que el $\cos(t)$ y el $\operatorname{sen}(t)$ son la primera y segunda coordenadas, respectivamente, de un par ordenado (x, y), tenemos que $x^2 + y^2 = 1$ y esto representa la circunferencia unitaria (de radio 1) con centro en $(0, 0)$.

Figura A.1: Circunferencia $x^2 + y^2 = 1$



De manera análoga, si se consideran $x_0, y_0, r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ y el siguiente cambio de variables

$$x - x_0 = r\cos t\,,\ y - y_0 = r\operatorname{sen} t$$

se tiene que

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\cos^2 t + r^2\operatorname{sen}^2 t.$$

Esto permite generalizar la idea anterior a circunferencias que no sean unitarias ni tengan centro en el origen. Por lo tanto, se llega a que una **circunferencia** es el siguiente conjunto de puntos

$$C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\right\}. \tag{A.1.1}$$

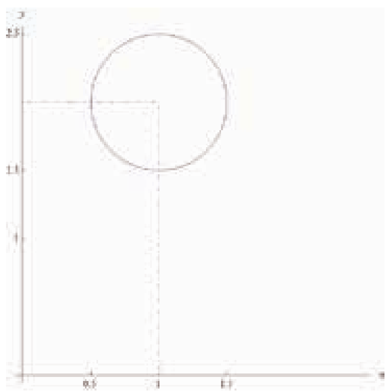
(x_0, y_0) se denomina *centro de la circunferencia* y r es el radio de la misma (siempre mayor que 0). Se destaca el hecho de que el centro de la circunferencia es un punto que no está en ella, es decir, $(x_0, y_0) \notin C$, pues $(x_0 - x_0)^2 + (y_0 - y_0)^2 = 0 \neq r^2$, salvo que $r = 0$; en cuyo caso, la circunferencia es un punto y su centro es el único punto que ella tiene (x_0, y_0). Otra característica que cumple el centro de la circunferencia es que equidista de todos los puntos de ella, más aún, esa distancia es la que se denomina *radio de la circunferencia*.

Ejemplo A.1.1. El conjunto de puntos dado por

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = \frac{1}{4}\}$$

es una circunferencia de centro $(1, 2)$ y radio $\frac{1}{2}$.

Figura A.2: Circunferencia $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = \frac{1}{4}$



A.2. Elipses

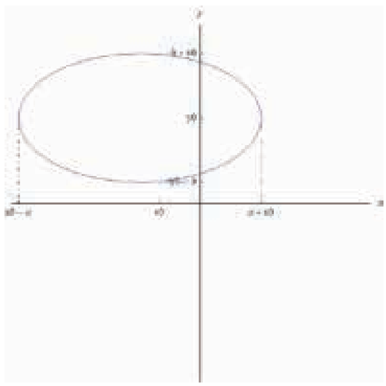
La elipse puede pensarse como una deformación de una circunferencia o, mejor aún, como un caso más general, que contiene a la circunferencias como un ejemplo específico. Si $x = a\cos t$ e $y = b\,\mathrm{sen}\, t, a\,,\ b > 0$ tenemos que $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Esto equivale a decir que a la circunferencia unitaria del caso anterior la deformamos en un factor “a” horizontalmente y en un factor “b” verticalmente. Si se extiende este mismo concepto a elipses con otros centros, queda definido

el conjunto de puntos que conforman una elipse de forma más general

$$E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \right\} \tag{A.2.1}$$

(x_0, y_0) se denomina *centro de la elipse* a y b son los radios menor y mayor. Debemos tener en cuenta que el centro de la elipse no es equidistante a cualquier punto de ella, eso solamente ocurre en el caso que la elipse sea una circunferencia, es decir que $a = b$.

Figura A.3: Elipse $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$



Una observación importante es el hecho de que para identificar claramente una elipse, la ecuación debe tener en la expresión de la derecha siempre un 1. Por ejemplo, el conjunto

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, 4x^2 + (y+1)^2 = 9\}$$

corresponde a una elipse. En efecto,

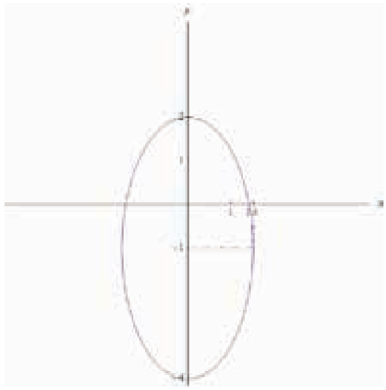
$$\begin{aligned} \frac{4x^2 + (y+1)^2}{9} = \frac{9}{9} \quad &\Rightarrow \quad \frac{4x^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1 \\ &\Rightarrow \quad \frac{x^2}{\frac{9}{4}} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1, \end{aligned}$$

y, finalmente,

$$\Rightarrow \frac{x^2}{(\frac{3}{2})^2} + \frac{(y+1)^2}{3^2} = 1.$$

En este caso, la expresión corresponde a la de una elipse con centro en $(0, -1)$, con $a = \frac{3}{2}$ y $b = 3$. Lo único que se hizo fue manipular algebraicamente la ecuación, por ejemplo se utilizó que $4 = \frac{1}{\frac{1}{4}}$ y luego se escribió todo lo del denominador como cuadrados para obtener a y b.

Figura A.4: Elipse $4x^2 + (y+1)^2 = 9$



A.3. Hipérbolas

Sea H el siguiente conjunto

$$H = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \, x^2 - y^2 = 1\right\}. \tag{A.3.1}$$

Se tiene que $x^2 - y^2 = 1$, o equivalentemente $(x-y).(x+y) = 1$, ya que se trata de una diferencia de números reales al cuadrado. Si consideramos un cambio de variables lineal, $\overline{x}$ y a $\overline{y}$, definido por:

$$\overline{x} = x - y \, , \, \overline{y} = x + y, \tag{A.3.2}$$

queda

$$\overline{x}.\overline{y} = 1$$

y esto no es más que una hipérbola en el plano $\overline{x}, \overline{y}$, con asíntotas $\overline{x} = 0$ y $\overline{y} = 0$. Volviendo a las variables x e y originales, se tiene que $x^2 - y^2 = 1$ es una hipérbola con asíntotas $x - y = 0$ y $x + y = 0$, o sea que las asíntotas son oblicuas y son las rectas identidad y su perpendicular que pasa por el $(0, 0)$. También podríamos haber deducido que las asíntotas eran esas pensando lo siguiente: si $(x-y).(x+y) = 1$, entonces, $(x-y).(x+y) \neq 0$, de lo que se deduce que $x - y \neq 0$ y $x + y \neq 0$. Esto implica que los puntos en los que $x = y$ o los que $x = -y$ no pertenecen a la hipérbola, por lo tanto, conforman las asíntotas. El gráfico de este tipo de curva es el correspondiente a la figura A.5 y consta de dos tramos no conectados entre sí.

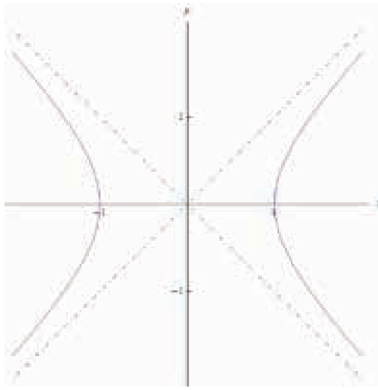
Por otra parte, si se considera este otro conjunto de puntos

$$S = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \, y^2 - x^2 = 1\right\}$$

se tiene que $y^2 - x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = -1$, con lo cual haciendo nuevamente el cambio de variables (A.3.2) queda

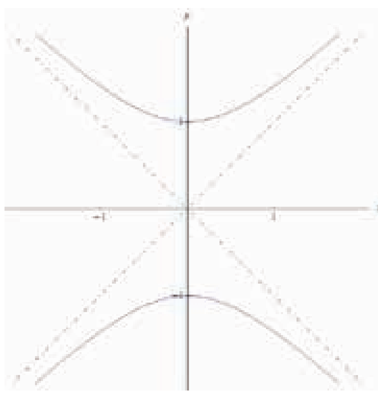
$$\overline{x}.\overline{y} = -1.$$

Figura A.5: Hipérbola $x^2 - y^2 = 1$



De este modo, las asíntotas serían las mismas del caso anterior pero en este caso la curva pasa por los puntos $(0, -1)$ y $(0, 1)$. La curva correspondiente es la de la figura A.6.

Figura A.6: Hipérbola $y^2 - x^2 = 1$



Del mismo modo que en los casos anteriores se puede generalizar la fórmula de la hipérbola, como a continuación:

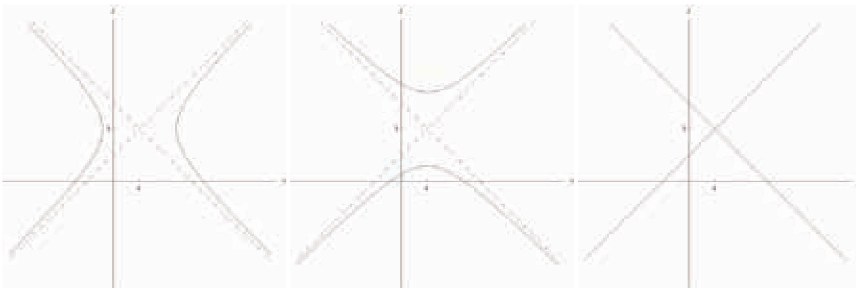
$$H = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 = d, d \in \mathbb{R}\right\}. \qquad \text{(A.3.3)}$$

Si $d > 0$, el gráfico de la hipérbola es similar al de la figura A.7a. Si $d < 0$, el gráfico de la hipérbola es similar al de la figura A.7b. Si $d = 0$, tenemos un caso distinto, dado que

$$(x - x_0)(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow x = x_0 \text{ o } y = y_0.$$

Figura A.7: Hipérbola $(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 = d$

(a) $d > 0$ **(b)** $d < 0$ **(c)** $d = 0$



Por lo tanto, la hipérbola degeneró en sus asíntotas que son las dos rectas $x = x_0$ e $y = y_0$.

Ejemplo A.3.1.

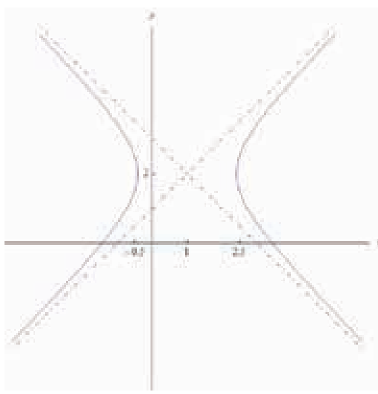
$$S = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x-1)^2 - (y+2)^2 = 2\right\}.$$

Factorizando la diferencia de cuadrados

$$(x - 1 - y + 2)(x - 1 + y - 2) = 2 \Leftrightarrow (x - y + 1)(x + y - 3) = 2,$$

lo cual implica que $x - y + 1 \neq 0$ y que $x + y - 3 \neq 0$. Entonces las asíntotas son $y = x + 1$ e $y = 3 - x$ y la curva corresponde a la figura A.8.

Figura A.8: Hipérbola $(x - 1)^2 - (y + 2)^2 = 2$



Apéndice B

Comandos para graficar con el programa Mathematica

Algunos comandos básicos del programa Mathematica (resultan válidos para dos o tres variables, indistintamente):

1) $\{x, y\}$ representa un vector de dos coordenadas x e y. Si se quieren agregar coordenadas, se lo hace mediante comas.

2) Axes $\rightarrow$ True : grafica los ejes cartesianos (si no se quiere graficar se pone False, en lugar de True).

3) AxesOrigin $\rightarrow$ $\{0, 0\}$: grafica el corte de los ejes cartesianos.

4) AxesLabel $\rightarrow$ $\{x, y\}$: le da nombre a los ejes cartesianos x e y, en ese orden, respectivamente.

5) Frame $\rightarrow$ False: no coloca marco al gráfico.

6) Ticks $\rightarrow$ None: no coloca valores numéricos ni marcas en los ejes cartesianos.

7) PlotStyle $\rightarrow$: hace de un determinado estilo o color una línea o región.

8) PlotPoints $\rightarrow$ 40: indica cuántos puntos de evaluación hará para graficar el comando (mientras mayor es el número, más calidad tiene el gráfico, pero en contraparte es más pesado para almacenarlo como dato).

Nota 1: Siempre antes de realizar un gráfico conviene colocar la frase Clear[x, y], pues de este modo se evita tomar variables con valores previamente asignados en el archivo (si hay nuevas variables definidas, también conviene incluirlas dentro del comando Clear).

Nota 2: En los gráficos que son en 2D (en el plano) se puede escribir encima, marcar flechas de dirección, señalar y editar haciendo click derecho sobre la imagen.

Nota 3: Al terminar de escribir un comando se debe pulsar shift+enter para que el programa procese lo ingresado.

Capítulo 1

Figura 1.1:
RegionPlot$[y \leq 10(x-1)$^$2x(x+0{,}5)(x-0{,}5), \{x,-1,1\}, \{y,-4,4\},$
Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0,0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x,y\}$,
Frame $\rightarrow$ False$]$
Figura 1.2a:
RegionPlot$[0 \leq x \leq 4\pi \&\&$Sin$[x] \leq y \leq$ Sin$[x]+1, \{x,-1,2\pi\}, \{y,-2,2\},$
Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0,0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x,y\}$, Ticks $\rightarrow$ False,
Frame $\rightarrow$ False$]$
Figura 1.2b:
RegionPlot$[0 \leq y \leq 4\pi \&\&$Sin$[2y] \leq x \leq$ Sin$[2y]+1, \{x,-2,2\}, \{y,0,\pi\},$
Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0,0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x,y\}$, Ticks $\rightarrow$ False,
Frame $\rightarrow$ False$]$
Figura 1.2c:
RegionPlot$[x$^$2+y$^$2 \leq 1, \{x,-2,2\}, \{y,-2,2\},$ Axes $\rightarrow$ True,
AxesOrigin $\rightarrow \{0,0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x,y\}$, Ticks $\rightarrow$ None,
Frame $\rightarrow$ False$]$
Figura 1.3:
g1 $=$ RegionPlot$[1 \leq x \leq 3\&\&1 \leq y \leq 2, \{x,-{,}25,4\}, \{y,-{,}5,2\},$
Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0,0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x,y\}$,
Ticks $\rightarrow \{\{\{1,a\},\{3,b\}\},\{\{1,c\},\{2,d\}\}\}$, Frame $\rightarrow$ False$]$;
c1 $=$ ParametricPlot$[\{u,1\}, \{u,0,1\}$, Axes $\rightarrow$ False, PlotStyle $\rightarrow$ DotDashed$]$;
c2 $=$ ParametricPlot$[\{u,2\}, \{u,0,1\}$, Axes $\rightarrow$ False, PlotStyle $\rightarrow$ DotDashed$]$;
c3 $=$ ParametricPlot$[\{1,u\}, \{u,0,1\}$, Axes $\rightarrow$ False, PlotStyle $\rightarrow$ DotDashed$]$;
c4 $=$ ParametricPlot$[\{3,u\}, \{u,0,1\}$, Axes $\rightarrow$ False, PlotStyle $\rightarrow$ DotDashed$]$;
Show$[$g1, c1, c2, c3, c4$]$
Figura 1.4:
RegionPlot$[x \leq y \leq 2x, \{x,-{,}5,1\}, \{y,-2,2\},$ Axes $\rightarrow$ True,
AxesOrigin $\rightarrow \{0,0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x,y\}$, Ticks $\rightarrow \{\{-2,-1,0,1,2\},\{-1,1\}\}$,
Frame $\rightarrow$ False$]$
Figura 1.5:
RegionPlot$[-1 \leq x \leq 1\&\&1 \leq y-2x \leq 3\&\&1 \leq y-2x \leq 2,$
$\{x,-2,2\}, \{y,-1,4\},$ Axes $\rightarrow$ True,
AxesOrigin $\rightarrow \{0,0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x,y\}$,
Ticks $\rightarrow \{\{-1,0,1\},\{-1,1,2,3,4\}\}$, Frame $\rightarrow$ False$]$
Figura 1.6:
RegionPlot$[x$^$2+y$^$2 \leq 1, \{x,-2,2\}, \{y,-2,2\},$ Axes $\rightarrow$ True,
AxesOrigin $\rightarrow \{0,0\}$,
AxesLabel $\rightarrow \{x,y\}$, Ticks $\rightarrow \{\{-2,-1,0,1,2\},\{-1,1\}\}$, Frame $\rightarrow$ False$]$
Figura 1.7:
g1 $=$ RegionPlot$[(x-3/2)$^$2+(y-2)$^$2 \leq 1, \{x,-1,3\}, \{y,-1,3\},$
Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0,0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x,y\}$,
Ticks $\rightarrow \{\{\{3/2,$ x0$\}\},\{\{2,$ y0$\}\}\}$, Frame $\rightarrow$ False$]$

c1 = ParametricPlot[$\{u, 2\}, \{u, 0, 3/2\}$, Axes → False, PlotStyle → DotDashed];
c2 = ParametricPlot[$\{3/2, u\}, \{u, 0, 2\}$, Axes → False, PlotStyle → DotDashed];
Show[g1, c1, c2]

Figura 1.8:

RegionPlot[$x\^{}2/3\^{}2 + y\^{}2/2\^{}2 \leq 1, \{x, -4, 4\}, \{y, -4, 4\}$, Axes → True,
AxesOrigin → $\{0, 0\}$, AxesLabel → $\{x, y\}$,
Ticks → $\{\{\{-3, -a\}, \{3, a\}\}, \{\{-2, -b\}, \{2, b\}\}\}$, Frame → False]

Figura 1.9:

s1 = RegionPlot[$(x + 1{,}5)\^{}2/3\^{}2 + (y - 2)\^{}2/(1{,}5)\^{}2 \leq 1, \{x, -4{,}5, 4\}$,
$\{y, -4, 4\}$, Axes → True, AxesOrigin → $\{0, 0\}$, AxesLabel → $\{x, y\}$,
Ticks → $\{\{\{-4{,}5, \text{x0} - a\}, \{-1, \text{x0}\}, \{1{,}5, \text{x0} + a\}\}, \{\{{,}5, \text{y0} - b\}, \{2, \text{y0}\}$,
$\{3{,}5, \text{y0} + b\}\}\}$, Frame → False];
c1 = ParametricPlot[$\{-4{,}5, u\}, \{u, 0, 2\}$, Axes → False, PlotStyle → DotDashed];
c2 = ParametricPlot[$\{1{,}5, u\}, \{u, 0, 2\}$, Axes → False, PlotStyle → DotDashed];
c3 = ParametricPlot[$\{u, {,}5\}, \{u, -1, 0\}$, Axes → False, PlotStyle → DotDashed];
c4 = ParametricPlot[$\{u, 3{,}5\}, \{u, -1, 0\}$, Axes → False, PlotStyle → DotDashed];
Show[s1, c1, c2, c3, c4]

Figura 1.10:

g1 = RegionPlot[$x\^{}2 - y\^{}2 \leq 1\&\& - 1 \leq y \leq 1, \{x, -4, 4\}, \{y, -3, 3\}$,
Axes → True, AxesOrigin → $\{0, 0\}$, AxesLabel → $\{x, y\}$,
Ticks → $\{\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}, \{-2, -1, 1, 2\}\}$, Frame → False];
hiperbola = ContourPlot[$x\^{}2 - y\^{}2{=}{=}1, \{x, -4, 4\}, \{y, -3, 3\}$, Axes → True,
AxesOrigin → $\{0, 0\}$, AxesLabel → $\{x, y\}$, Ticks → $\{\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$,
$\{-2, -1, 1, 2\}\}$, Frame → False];
rectas = ContourPlot[$\{y{=}{=}1, y == -1\}, \{x, -4, 4\}, \{y, -3, 3\}$, Axes → True,
AxesOrigin → $\{0, 0\}$, AxesLabel → $\{x, y\}$, Ticks → $\{\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$,
$\{-2, -1, 1, 2\}\}$, Frame → False];
Show[g1, hiperbola, rectas]

Figura 1.11:

g1 = RegionPlot[$x\^{}2 - y\^{}2 \geq 1, \{x, -3, 3\}, \{y, -3, 3\}$, Axes → True,
AxesOrigin → $\{0, 0\}$, AxesLabel → $\{x, y\}$, Ticks → $\{\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$,
$\{-2, -1, 1, 2\}\}$, Frame → False];
hiperbola = ContourPlot[$x\^{}2 - y\^{}2{=}{=}1, \{x, -4, 4\}, \{y, -3, 3\}$, Axes → True,
AxesOrigin → $\{0, 0\}$, AxesLabel → $\{x, y\}$, Ticks → $\{\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$,
$\{-2, -1, 1, 2\}\}$, Frame → False];
Show[g1, hiperbola]

Figura 1.12:

g1 = RegionPlot[$-1 \leq x \leq 1\&\&0 \leq y \leq 1, \{x, -2, 2\}, \{y, -2, 2\}$, Axes → True,
AxesOrigin → $\{0, 0\}$, AxesLabel → $\{x, y\}$, Ticks → $\{\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$,
$\{-2, -1, 1, 2\}\}$, Frame → False];
g2 = RegionPlot[$1 \leq y \leq 2\&\&y - 2 \leq x \leq 2 - y, \{x, -2, 2\}, \{y, -2, 2\}$,
Axes → True, AxesOrigin → $\{0, 0\}$, AxesLabel → $\{x, y\}$,
Ticks → $\{\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}, \{-2, -1, 1, 2\}\}$,
PlotStyle → {Orange, Opacity[0,5]}, Frame → False];

Show[g1, g2]
Figura 1.13:
g1 = RegionPlot[$-1 \leq y \leq 2\&\&0 \leq x \leq \sqrt{4 - y\hat{}2}, \{x, -2, 2\}, \{y, -2, 2\}$,
Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y\}$,
Ticks $\rightarrow \{\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}, \{-2, -1, 1, 2\}\}$, Frame $\rightarrow$ False];
g2 = RegionPlot[$-1 \leq y \leq 1\&\& - \sqrt{1 - y\hat{}2} \leq x \leq 0, \{x, -2, 2\}, \{y, -2, 2\}$,
Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0\}$,
AxesLabel $\rightarrow \{x, y\}$, Ticks $\rightarrow \{\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}, \{-2, -1, 1, 2\}\}$,
PlotStyle $\rightarrow$ {Orange, Opacity[0,5]}, Frame $\rightarrow$ False];
Show[g1, g2]
Figura 1.14:
g1 = RegionPlot[$-1 \leq y \leq 1\&\& - 2\sqrt{1 - y\hat{}2} \leq x \leq 0, \{x, -2, 2\}, \{y, -2, 2\}$,
Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0\}$,
Ticks $\rightarrow \{\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}, \{-2, -1, 1, 2\}\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y\}$,
Frame $\rightarrow$ False];
g2 = RegionPlot[$0 \leq x \leq 2\&\&x - 2 \leq y \leq 2 - x, \{x, -2, 2\}, \{y, -2, 2\}$,
Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0\}$,
AxesLabel $\rightarrow \{x, y\}$, Ticks $\rightarrow \{\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}, \{-2, -1, 1, 2\}\}$,
PlotStyle $\rightarrow$ {Orange, Opacity[0,5]}, Frame $\rightarrow$ False];
Show[g1, g2]
Figura 1.15:
RegionPlot3D[$0 \leq x \leq 1\&\&0 \leq y \leq 2 - x\&\&0 \leq z \leq 4 - x\hat{}2 - y\hat{}2, \{x, -1, 3\}$,
$\{y, -1, 3\}, \{z, -1, 4\}$, Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0, 0\}$,
Ticks $\rightarrow$ False, AxesLabel $\rightarrow \{x, y, z\}$,
PlotPoints $\rightarrow 40$]
Figura 1.16:
RegionPlot3D[$0 \leq x \leq 1\&\&0 \leq z \leq 2 - x\&\&0 \leq y \leq 4 - x\hat{}2 - z\hat{}2, \{x, -1, 3\}$,
$\{y, -1, 4\}, \{z, -1, 3\}$, Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0, 0\}$,
Ticks $\rightarrow$ False, AxesLabel $\rightarrow \{x, y, z\}$,
PlotPoints $\rightarrow 40$]
Figura 1.17:
RegionPlot3D[$0 \leq z \leq 1\&\&0 \leq y \leq 2 - z\&\&0 \leq x \leq 4 - y\hat{}2 - z\hat{}2, \{x, -1, 4\}$,
$\{y, -1, 3\}, \{z, -1, 3\}$, Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0, 0\}$,
Ticks $\rightarrow$ False, AxesLabel $\rightarrow \{x, y, z\}$,
PlotPoints $\rightarrow 40$]
Figura 1.18:
RegionPlot3D[$0 \leq z \leq 1\&\&0 \leq y \leq 2\&\&0 \leq x \leq 4, \{x, -1, 4\}, \{y, -1, 3\}$,
$\{z, -1, 3\}$, Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0, 0\}$,
Ticks $\rightarrow$ False, AxesLabel $\rightarrow \{x, y, z\}$, PlotPoints $\rightarrow 40$]
Figura 1.19:
RegionPlot3D[$x + y + z \leq 2\&\&x \geq 0\&\&y \geq 0\&\&z \geq 0, \{x, -1, 3\}, \{y, -1, 3\}$,
$\{z, -1, 3\}$, Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0, 0\}$,
Ticks $\rightarrow$ False, AxesLabel $\rightarrow \{x, y, z\}$, PlotPoints $\rightarrow 40$]
Figura 1.20:

RegionPlot3D$[x + y + z \leq 2\&\&x \geq 0\&\&y \geq 0\&\&z \geq 0, \{x, -1, 3\}, \{y, -1, 3\},$
$\{z, -1, 3\}$, Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0, 0\}$,
AxesLabel $\rightarrow \{x, y, z\}$, PlotPoints $\rightarrow 40]$
Figura 1.21:
RegionPlot$[0 \leq x \leq 2\&\&0 \leq y \leq 2 - x, \{x, -1, 2{,}5\}, \{y, -1, 2{,}5\}$, Axes $\rightarrow$ True,
AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y\}$, Ticks $\rightarrow \{\{-2, -1, 0, 1, 2\}, \{-1, 1\}\}$,
Frame $\rightarrow$ False$]$
Figura 1.22:
$\alpha = {,}5;$
ParametricPlot3D$[\{(2 - \alpha z) +$ Cos$[t], (2 - \alpha z) +$ Sin$[t], z\}, \{t, 0,$ 2Pi$\}, \{z, 0, 2\}$,
Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y, z\}$, Ticks $\rightarrow$ False$]$
Figura 1.23:
RegionPlot3D$[x\hat{}2 + y\hat{}2 \leq 36, \{x, -6, 6\}, \{y, -6, 6\}, \{z, -8, 8\}$, Axes $\rightarrow$ True,
AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y, z\}$, Ticks $\rightarrow$ False, PlotPoints $\rightarrow 40]$
Figura 1.24:
RegionPlot3D$[(x - 1)\hat{}2 + (y + 1)\hat{}2 \leq 4, \{x, -4, 4\}, \{y, -4, 4\}, \{z, -8, 8\}$,
Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y, z\}$, Ticks $\rightarrow$ False,
PlotPoints $\rightarrow 40]$
Figura 1.25:
RegionPlot3D$[x\hat{}2 + y\hat{}2 \leq 36\&\& - x \leq y \leq x, \{x, -6, 6\}, \{y, -6, 6\}, \{z, -8, 8\}$,
Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y, z\}$,
PlotPoints $\rightarrow 50]$
Figura 1.26:
RegionPlot$[x\hat{}2 + y\hat{}2 \leq 36\&\& - x \leq y \leq x, \{x, -4, 6\}, \{y, -6, 6\}$, Axes $\rightarrow$ True,
AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y\}$,
Ticks $\rightarrow \{\{-2, -1, 0, 1, 2, 6\}, \{-1, 1\}\}$, Frame $\rightarrow$ False$]$
Figura 1.27:
RegionPlot3D$[(x - 1)\hat{}2/4 + (y + 1)\hat{}2 \leq 4, \{x, -3, 5\}, \{y, -4, 4\}, \{z, -8, 8\}$,
Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y, z\}$,
Ticks $\rightarrow$ False, PlotPoints $\rightarrow 40]$
Figura 1.28:
RegionPlot3D$[(x - 1)\hat{}2 - (y + 1)\hat{}2 \leq 4, \{x, -10, 10\}, \{y, -10, 10\}, \{z, -8, 8\}$,
Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y, z\}$,
Ticks $\rightarrow$ False, PlotPoints $\rightarrow 40]$
Figura 1.29:
RegionPlot3D$[x\hat{}2 - y\hat{}2 \leq 1\&\& - 1 \leq y \leq 1\&\& - 1 \leq z \leq 1, \{x, -2, 2\}$,
$\{y, -2, 2\}, \{z, -2, 2\}$, Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0, 0\}$,
AxesLabel $\rightarrow \{x, y, z\}$, PlotPoints $\rightarrow 40]$
Figura 1.30:
RegionPlot3D$[y\hat{}2 + 1 \leq x\&\&x \leq 4\&\&0 \leq z \leq 4, \{x, -1, 5\}$,
$\{y, -3, 3\}, \{z, -1, 5\}$, Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0, 0\}$,
AxesLabel $\rightarrow \{x, y, z\}$, Ticks $\rightarrow$ False, PlotPoints $\rightarrow 40]$
Figura 1.31:
RegionPlot$[z \geq y\hat{}2\&\&z \leq 4, \{y, -3, 3\}, \{z, -1, 4{,}5\}$, Axes $\rightarrow$ True,

AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{y, z\}$, Ticks $\rightarrow \{\{-2, -1, 0, 1, 2\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$,
Frame $\rightarrow$ False]

Figura 1.32:
RegionPlot3D[y^2 $\leq z$&&$z \leq 4$&&0<=$x \leq 2, \{x, -3, 3\}, \{y, -3, 3\}, \{z, -1, 5\}$,
Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y, z\}$, PlotPoints $\rightarrow 40$]

Figura 1.33:
RegionPlot[$(x - 2)$^2 + $(y + 1)$^2 $\leq 4, \{x, -1, 5\}, \{y, -3, 2\}$, Axes $\rightarrow$ True,
AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y\}$, Ticks $\rightarrow \{\{0, 1, 2, 3, 4\}, \{-2, -1, 1, 2\}\}$,
Frame $\rightarrow$ False]

Figura 1.34:
RegionPlot3D[$(x - 2)$^2 + $(y + 1)$^2 ≤ 4&& $- 2 \leq z \leq 3, \{x, -4, 4\}, \{y, -4, 4\}$,
$\{z, -4, 4\}$, Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{y, x, z\}$,
PlotPoints $\rightarrow 40$]

Figura 1.35:
RegionPlot3D[x^2 + y^2 $\leq z$^2&&0<=$z \leq 1, \{x, -2, 2\}, \{y, -2, 2\}, \{z, 0, 1{,}5\}$,
Axes $\rightarrow$ False, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y, z\}$, Ticks $\rightarrow$ False,
PlotPoints $\rightarrow 60$]

Figura 1.36a:
g1 = RegionPlot[x^2 + y^2 $\leq 1, \{x, -3, 3\}, \{y, -3, 3\}$, Axes $\rightarrow$ True,
AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0\}$, Ticks $\rightarrow \{\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}, \{-2, -1, 1, 2\}\}$,
AxesLabel $\rightarrow \{x, y\}$, Frame $\rightarrow$ False];
g2 = RegionPlot[x^2 + y^2 $\leq 4, \{x, -3, 3\}, \{y, -3, 3\}$, Axes $\rightarrow$ True,
AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y\}$, PlotStyle $\rightarrow$ Directive[Opacity[0,5]],
Frame $\rightarrow$ False];
g3 = RegionPlot[x^2 + y^2 $\leq 9, \{x, -3, 3\}, \{y, -3, 3\}$, Axes $\rightarrow$ True,
AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y\}$, PlotStyle $\rightarrow$ Directive[Opacity[0,5]],
Frame $\rightarrow$ False];
Show[g1, g2, g3]

Figura 1.36b:
g1 = ParametricPlot3D[{uCos[v], uSin[v], $1/4\}, \{u, 0, 1/4\}, \{v, 0$, 2Pi},
Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0, 0\}$, Ticks $\rightarrow$ False, AxesLabel $\rightarrow \{x, y, z\}$,
PlotRange $\rightarrow$ All];
g2 = ParametricPlot3D[{uCos[v], uSin[v], $1/8\}, \{u, 0, 1/8\}, \{v, 0$, 2Pi},
PlotRange $\rightarrow$ All];
g3 = ParametricPlot3D[{uCos[v], uSin[v], $1/6\}, \{u, 0, 1/6\}, \{v, 0$, 2Pi},
PlotRange $\rightarrow$ All];
g4 = ParametricPlot3D[{uCos[v], uSin[v], $1/10\}, \{u, 0, 1/10\}, \{v, 0$, 2Pi},
PlotRange $\rightarrow$ All];
g5 = ParametricPlot3D[{uCos[v], uSin[v], $1/16\}, \{u, 0, 1/16\}, \{v, 0$, 2Pi},
PlotRange $\rightarrow$ All];
g6 = ParametricPlot3D[{uCos[v], uSin[v], $1/25\}, \{u, 0, 1/25\}, \{v, 0$, 2Pi},
PlotRange $\rightarrow$ All];
g7 = ParametricPlot3D[{uCos[v], uSin[v], $-1/4\}, \{u, 0, 1/4\}, \{v, 0$, 2Pi},
PlotRange $\rightarrow$ All];

g8 = ParametricPlot3D[{uCos[v], uSin[v], $-1/8$}, {u, 0, 1/8}, {v, 0, 2Pi},
PlotRange → All];
g9 = ParametricPlot3D[{uCos[v], uSin[v], $-1/6$}, {u, 0, 1/6}, {v, 0, 2Pi},
PlotRange → All];
g10 = ParametricPlot3D[{uCos[v], uSin[v], $-1/10$}, {u, 0, 1/10}, {v, 0, 2Pi},
PlotRange → All];
g11 = ParametricPlot3D[{uCos[v], uSin[v], $-1/16$}, {u, 0, 1/16}, {v, 0, 2Pi},
PlotRange → All];
g12 = ParametricPlot3D[{uCos[v], uSin[v], $-1/25$}, {u, 0, 1/25}, {v, 0, 2Pi},
PlotRange → All];
Show[g1, g2, g3, g4, g5, g6, g7, g8, g9, g10,
g11, g12]

Figuras 1.37a y 1.37b :

g1 = RegionPlot[y^2 ≤ z^2, {y, −1, 1}, {z, −1, 1}, Axes → True,
AxesOrigin → {0, 0}, Ticks → {{−3, −2, −1, 0, 1, 2, 3}, {−2, −1, 1, 2}},
AxesLabel → {y, z}, Frame → False];
g2 = RegionPlot[1 + y^2 ≤ z^2, {y, −1, 1}, {z, −1, 1}, Axes → True,
AxesOrigin → {0, 0}, AxesLabel → {y, z}, Frame → False];
Show[g1, g2]

Figura 1.38 :

conos = ContourPlot3D[x^2 + y^2==z^2, {x, −2, 2}, {y, −2, 2}, {z, −1, 1},
Axes → True, AxesOrigin → {0, 0, 0}, AxesLabel → {x, y, z},
PlotPoints → 40];
g2 = ParametricPlot3D[{uCos[v], uSin[v], −1}, {u, 0, 1}, {v, 0, 2Pi},
PlotRange → All];
g3 = ParametricPlot3D[{uCos[v], uSin[v], 1}, {u, 0, 1}, {v, 0, 2Pi},
PlotRange → All];
Show[conos, g2, g3]

Figura 1.39:

g1 = RegionPlot[(x − 3/2)^2 + (y − 2)^2 ≤ 1, {x, −1, 3}, {y, 0, 4}, Axes → True,
AxesOrigin → {0, 0}, AxesLabel → {x, y}, Ticks → {{{3/2, x0}}, {{2, y0}}},
Frame → False];
g2 = RegionPlot[(x − 3/2)^2 + (y − 2)^2 ≤ 2, {x, −1, 3}, {y, 0, 4}, Axes → True,
AxesOrigin → {0, 0}, AxesLabel → {x, y}, PlotStyle → Directive[Opacity[0,2]],
Frame → False];
g3 = RegionPlot[(x − 3/2)^2 + (y − 2)^2 ≤ 1/4, {x, −1, 3}, {y, 0, 4},
PlotStyle → Directive[Opacity[0,2]], Axes → True, AxesOrigin → {0, 0},
AxesLabel → {x, y}, Frame → False];
c1 = ParametricPlot[{u, 2}, {u, 0, 3/2}, Axes → False, PlotStyle → DotDashed];
c2 = ParametricPlot[{3/2, u}, {u, 0, 2}, Axes → False, PlotStyle → DotDashed];
Show[g1, g2, g3, c1, c2]

Figuras 1.40a y 1.40b :

RegionPlot[(y − 1)^2 ≤ (z − 1)^2, {y, −1, 3}, {z, −1, 3}, Axes → True,
AxesOrigin → {0, 0}, Ticks → {{0, {1, y0}}, {0, {1, z0}}},

AxesLabel $\rightarrow \{y, z\}$, Frame $\rightarrow$ False]
Figura 1.41:
ContourPlot3D[$\{(x-1)\text{^}2+(y+1)\text{^}2 == (z-1)\text{^}2\}, \{x, -2, 2\}, \{y, -2, 2\}, \{z, 0, 2\}$,
Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y, z\}$,
Ticks $\rightarrow \{\{\{1,$ x0$\}\}, \{\{-1,$ y0$\}\}, \{\{1,$ z0$\}\}\}$, PlotPoints $\rightarrow 50$]
Figura 1.42:
ContourPlot3D[$\{(x-1)\text{^}2 + (y+1)\text{^}2 == z\text{^}2\}, \{x, -2, 2\}, \{y, -2, 2\}, \{z, 0, 1\}$,
Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0, 0\}$, Ticks $\rightarrow \{\{\{1,$ x0$\}\}, \{\{-1,$ y0$\}\}\}$,
AxesLabel $\rightarrow \{x, y, z\}$, Ticks $\rightarrow$ False, PlotPoints $\rightarrow 40$]
Figura 1.43:
RegionPlot3D[$x\text{^}2 + y\text{^}2 \geq z\text{^}2\&\& - 1$<=$z \leq 1, \{x, -2, 2\}, \{y, -2, 2\}$,
$\{z, -1{,}5, 1{,}5\}$, Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y, z\}$,
PlotPoints $\rightarrow 40$, PlotStyle->Opacity[0,4]]
Figura 1.44:
RegionPlot3D[$\sqrt{(x-1)\text{^}2 + y\text{^}2} \leq z\&\&0$<=$z \leq 10, \{x, -12, 12\}$,
$\{y, -12, 12\}, \{z, 0, 10\}$, Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0, 0\}$,
AxesLabel $\rightarrow \{y, x, z\}$, PlotPoints $\rightarrow 40$]
Figura 1.45:
g1 $=$ RegionPlot[$\sqrt{(x-1)\text{^}2 + y\text{^}2} \leq 10, \{x, -12, 12\}, \{y, -12, 12\}$,
Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0\}$, Ticks $\rightarrow \{\{-9, 0, 1, 11\}, \{-10, 10\}\}$,
AxesLabel $\rightarrow \{x, y\}$, Frame $\rightarrow$ False];
g2 $=$ RegionPlot[$\sqrt{(x-1)\text{^}2 + y\text{^}2} \leq 7, \{x, -12, 12\}, \{y, -12, 12\}$,
Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y\}$,
Ticks $\rightarrow \{\{-9, 0, 1, 11\}, \{-10, 10\}\}$, PlotStyle $\rightarrow$ Directive[Opacity[0,2]],
Frame $\rightarrow$ False];
g3 $=$ RegionPlot[$\sqrt{(x-1)\text{^}2 + y\text{^}2} \leq 4, \{x, -12, 12\}, \{y, -12, 12\}$,
Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y\}$,
Ticks $\rightarrow \{\{-9, 0, 1, 11\}, \{-10, 10\}\}$, PlotStyle $\rightarrow$ Directive[Opacity[0,2]],
Frame $\rightarrow$ False];
Show[g1, g2, g3]
Figura 1.46:
RegionPlot3D[$\sqrt{x\text{^}2 + y\text{^}2} \leq z \leq 10\&\&0 \leq x \leq y, \{x, -1, 10\}$,
$\{y, -1, 10\}, \{z, -1, 10\}$, Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0, 0\}$,
AxesLabel $\rightarrow \{x, y, z\}$, PlotPoints $\rightarrow 40$]
Figura 1.47:
g1 $=$ RegionPlot3D[$\sqrt{x\text{^}2 + y\text{^}2} \leq 10\&\&0 \leq x \leq y, \{x, -1, 10\}, \{y, -1, 10\}$,
Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y\}$,
Ticks $\rightarrow \{\{0, \{5$Sqrt[2]$, a\}, 10\}, \{10\}\}$, Frame $\rightarrow$ False];
g2 $=$ RegionPlot3D[$\sqrt{x\text{^}2 + y\text{^}2} \leq 7\&\&0 \leq x \leq y, \{x, -1, 10\}, \{y, -1, 10\}$,
Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y\}$, Ticks $\rightarrow \{\{0, 10\}, \{10\}\}$,
PlotStyle $\rightarrow$ Directive[Opacity[0,2]], Frame $\rightarrow$ False];
g3 $=$ RegionPlot3D[$\sqrt{x\text{^}2 + y\text{^}2} \leq 5\&\&0 \leq x \leq y, \{x, -1, 10\}, \{y, -1, 10\}$,
Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y\}$, Ticks $\rightarrow \{\{0, 10\}, \{10\}\}$,
PlotStyle $\rightarrow$ Directive[Opacity[0,2]], Frame $\rightarrow$ False];

c1 = ParametricPlot[{5Sqrt[2], u}, {u, 0, 5Sqrt[2]}, Axes → False,
PlotStyle → DotDashed]; Show[g1, g2, g3, c1]

Figura 1.48:

RegionPlot3D[x^2 + y^2 ≤ z^2&&2<=z ≤ 4, {x, −5, 5}, {y, −5, 5},
{z, 0, 5}, Axes → True, AxesOrigin → {0, 0, 0}, AxesLabel → {x, y, z},
PlotPoints → 40]

Figura 1.49a:

g1 = RegionPlot[x^2/4 + y^2/9<=1, {x, −7, 7}, {y, −7, 7},
Axes → True, AxesOrigin → {0, 0}, AxesLabel → {x, y},
Ticks → {{−4, −3, −2, 0, 2, 3, 4}, {−6, −3, −2, 0, 2, 3, 6}}, Frame → False];
g2 = RegionPlot[x^2/4 + y^2/9<=2, {x, −7, 7}, {y, −7, 7}, Axes → True,
AxesOrigin → {0, 0}, AxesLabel → {x, y}, PlotStyle → Directive[Opacity[0,2]],
Frame → False];
g3 = RegionPlot[x^2/4 + y^2/9<=4, {x, −7, 7}, {y, −7, 7}, Axes → True,
AxesOrigin → {0, 0}, AxesLabel → {x, y}, PlotStyle → Directive[Opacity[0,3]],
Frame → False];
Show[g1, g2, g3]

Figura 1.49b:

g1 = ParametricPlot3D[{2uCos[v], 3uSin[v], 1}, {u, 0, 1}, {v, 0, 2Pi},
Axes → True, AxesOrigin → {0, 0, 0}, Ticks → False, AxesLabel → {x, y, z},
PlotRange → All];
g2 = ParametricPlot3D[{4uCos[v], 6uSin[v], 4}, {u, 0, 1}, {v, 0, 2Pi},
PlotRange → All];
g3 = ParametricPlot3D[{6uCos[v], 9uSin[v], 9}, {u, 0, 1}, {v, 0, 2Pi},
PlotRange → All];
g4 = ParametricPlot3D[{uCos[v], 3uSin[v]/2, 1/4}, {u, 0, 1}, {v, 0, 2Pi},
PlotRange → All];
g5 = ParametricPlot3D[{2uCos[v]/3, uSin[v], 1/9}, {u, 0, 1}, {v, 0, 2Pi},
PlotRange → All];
Show[g1, g2, g3, g4, g5]

Figura 1.50a:

RegionPlot[y^2/9<=z^2, {y, −12, 12}, {z, 0, 4}, Axes → True,
AxesOrigin → {0, 0}, AxesLabel → {y, z}, Ticks → {{−12, 0, 12}, {0, 4}},
Frame → False]

Figura 1.50b:

RegionPlot[x^2/4<=z^2, {x, −12, 12}, {z, 0, 4}, Axes → True,
AxesOrigin → {0, 0}, AxesLabel → {x, z}, Ticks → {{−8, 0, 8}, {0, 4}},
Frame → False]

Figura 1.51:

RegionPlot3D[x^2/4 + y^2/9<=z^2&&0<=z ≤ 4, {x, −12, 12},
{y, −12, 12}, {z, 0, 5}, Axes → True, AxesOrigin → {0, 0, 0},
AxesLabel → {x, y, z}, Ticks → {{−2, 2}, {−3, 3}, {4}}, PlotPoints → 40]

Figura 1.52b:

g1 = ParametricPlot3D[{uCos[v], uSin[v], 1/4}, {u, 0, 1/2}, {v, 0, 2Pi},

Axes → True, AxesOrigin → $\{0, 0, 0\}$, Ticks → False, AxesLabel → $\{x, y, z\}$,
PlotRange → All];
g2 = ParametricPlot3D[$\{u$Cos$[v], u$Sin$[v], 1\}, \{u, 0, 1\}, \{v, 0,$ 2Pi$\}$,
PlotRange → All];
g3 = ParametricPlot3D[$\{u$Cos$[v], u$Sin$[v], 2\}, \{u, 0,$ Sqrt[2]$\}, \{v, 0,$ 2Pi$\}$,
PlotRange → All];
g4 = ParametricPlot3D[$\{u$Cos$[v], u$Sin$[v], 4\}, \{u, 0, 2\}, \{v, 0,$ 2Pi$\}$,
PlotRange → All];
Show[g1, g2, g3, g4]

Figura 1.53a:
RegionPlot[y^2<=$z, \{y, -2, 2\}, \{z, 0, 4\}$, Axes → True, AxesOrigin → $\{0, 0\}$,
AxesLabel → $\{y, z\}$, Ticks → $\{\{-2, 0, 2\}, \{0, 4\}\}$, Frame → False]

Figura 1.53b:
RegionPlot[x^2<=$z, \{x, -2, 2\}, \{z, 0, 4\}$, Axes → True, AxesOrigin → $\{0, 0\}$,
AxesLabel → $\{x, z\}$, Ticks → $\{\{-2, 0, 2\}, \{0, 4\}\}$, Frame → False]

Figura 1.54:
RegionPlot3D[x^2 + y^2 ≤ z&&$z \leq 4, \{x, -2, 2\}, \{y, -2, 2\}, \{z, 0, 4\}$,
Axes → True, AxesOrigin → $\{0, 0, 0\}$, AxesLabel → $\{x, y, z\}$, PlotPoints → 40]

Figura 1.55:
RegionPlot3D[$(x - 1)$^2 + $(y + 1)$^2 ≤ $1 + z$&&$z \leq 4, \{x, -4, 4\}, \{y, -4, 4\}$,
$\{z, -1, 4\}$, Axes → True, AxesOrigin → $\{0, 0, 0\}$, AxesLabel → $\{y, x, z\}$,
Ticks → False, PlotPoints → 40]

Figura 1.56:
RegionPlot3D[$(x - 1)$^2/4 + $(y + 1)$^2/9 ≤ z&&$z \leq 4, \{x, -10, 10\}$,
$\{y, -10, 10\}, \{z, -1, 4\}$, Axes → True, AxesOrigin → $\{0, 0, 0\}$,
AxesLabel → $\{y, x, z\}$, Ticks → False, PlotPoints → 40]

Figura 1.57:
RegionPlot3D[x^2 + y^2 ≥ $z, \{x, -2, 2\}, \{y, -2, 2\}, \{z, 0, 4\}$, Axes → True,
AxesOrigin → $\{0, 0, 0\}$, AxesLabel → $\{x, y, z\}$, PlotPoints → 40,
PlotStyle->Opacity[0,4]]

Figura 1.59:
RegionPlot3D[$(x - 1)$^2 + z^2 ≤ y&&$y \leq 4, \{x, -3, 3\}, \{y, -1, 5\}, \{z, -3, 3\}$,
Axes → True, AxesOrigin → $\{0, 0, 0\}$, AxesLabel → $\{x, y, z\}$,
PlotPoints → 60]

Figura 1.58:
RegionPlot[$(x - 1)$^2 + z^2 ≤ $4, \{x, -3, 3\}, \{z, -3, 3\}$, Axes → True,
AxesOrigin → $\{0, 0\}$, AxesLabel → $\{x, z\}$, Ticks → $\{\{-1, 0, 1, 2\}, \{0, 2\}\}$,
Frame → False]

Figura 1.60:
RegionPlot3D[x^2 + y^2 ≤ $1 - z$&&$0 \leq z, \{x, -1{,}5, 1{,}5\}, \{y, -1{,}5, 1{,}5\}, \{z, 0, 1\}$,
Axes → True, AxesOrigin → $\{0, 0, 0\}$, AxesLabel → $\{x, y, z\}$, PlotPoints → 40]

Figura 1.62:
RegionPlot3D[$4x$^2 + $(y + 2)$^2 ≤ z&&$z \leq 4, \{x, -5, 5\}, \{y, -5, 2\}, \{z, 0, 4\}$,
Axes → True, AxesOrigin → $\{0, 0, 0\}$, AxesLabel → $\{y, x, z\}$, PlotPoints → 40]

Figura 1.63b:
g1 = ParametricPlot3D[{uCos[v], uSin[v], 0}, {$u, 0, 1$}, {$v, 0,$ 2Pi}, Axes → True,
AxesOrigin → {$0, 0, 0$}, Ticks → False, AxesLabel → {x, y, z},
PlotRange → All];
g2 = ParametricPlot3D[{uCos[v], uSin[v], 1}, {$u, 0,$ Sqrt[2]}, {$v, 0,$ 2Pi},
PlotRange → All];
g3 = ParametricPlot3D[{uCos[v], uSin[v], -1}, {$u, 0,$ Sqrt[2]}, {$v, 0,$ 2Pi},
PlotRange → All];
g4 = ParametricPlot3D[{uCos[v], uSin[v], 2}, {$u, 0,$ Sqrt[5]}, {$v, 0,$ 2Pi},
PlotRange → All];
g5 = ParametricPlot3D[{uCos[v], uSin[v], -2}, {$u, 0,$ Sqrt[5]}, {$v, 0,$ 2Pi},
PlotRange → All];
Show[g1, g2, g3, g4, g5]
Figura 1.64a:
RegionPlot[y^$2 - z$^$2 \leq 1$, {$y, -3{,}3, 3{,}3$}, {$z, -3, 3$}, Axes → True,
AxesOrigin → {$0, 0$}, AxesLabel → {y, z}, Ticks → {{$-2, 0, 2$}, {$0, 4$}},
Frame → False]
Figura 1.64b:
RegionPlot[x^$2 - z$^$2 \leq 1$, {$x, -3{,}3, 3{,}3$}, {$z, -3, 3$}, Axes → True,
AxesOrigin → {$0, 0$}, AxesLabel → {x, z}, Ticks → {{$-1, 0, 1, 2$}, {$0, 2$}},
Frame → False]
Figura 1.65:
RegionPlot3D[x^$2 + y$^$2 - z$^$2 \leq 1$, {$x, -3{,}3, 3{,}3$}, {$y, -3{,}3, 3{,}3$}, {$z, -3, 3$},
Axes → True, AxesOrigin → {$0, 0, 0$}, AxesLabel → {x, y, z},
PlotPoints → 60]
Figura 1.66:
RegionPlot3D[$(x-1)$^$2 + (y+1)$^$2 - (z-2)$^$2 \leq 1$, {$x, -3{,}3, 3{,}3$}, {$y, -3{,}3, 3{,}3$},
{$z, 0, 4$}, Axes → True, AxesOrigin → {$0, 0, 0$}, AxesLabel → {x, y, z},
Ticks → False, PlotPoints → 40]
Figura 1.67b:
g1 = ParametricPlot3D[{uCos[v], uSin[v], 2}, {$u, 0,$ Sqrt[3]}, {$v, 0,$ 2Pi},
Axes → True, AxesOrigin → {$0, 0, 0$}, Ticks → False, AxesLabel → {x, y, z},
PlotRange → All];
g2 = ParametricPlot3D[{uCos[v], uSin[v], -2}, {$u, 0,$ Sqrt[3]}, {$v, 0,$ 2Pi},
PlotRange → All];
g3 = ParametricPlot3D[{uCos[v], uSin[v], -3}, {$u, 0,$ Sqrt[5]}, {$v, 0,$ 2Pi},
PlotRange → All];
g4 = ParametricPlot3D[{uCos[v], uSin[v], 3}, {$u, 0,$ Sqrt[5]}, {$v, 0,$ 2Pi},
PlotRange → All];
g5 = ParametricPlot3D[{uCos[v], uSin[v], $1{,}5$}, {$u, 0, 1/$Sqrt[2]}, {$v, 0,$ 2Pi},
PlotRange → All];
g6 = ParametricPlot3D[{uCos[v], uSin[v], $-1{,}5$}, {$u, 0, 1/$Sqrt[2]}, {$v, 0,$ 2Pi},
PlotRange → All];
g7 = ParametricPlot3D[{uCos[v], uSin[v], $1{,}25$}, {$u, 0, 1/2$}, {$v, 0,$ 2Pi},

PlotRange $\rightarrow$ All];
g8 $=$ ParametricPlot3D$[\{u$Cos$[v], u$Sin$[v], 1{,}25\}, \{u, 0, 1/2\}, \{v, 0, 2Pi\},$
PlotRange $\rightarrow$ All];
Show[g1, g2, g3, g4, g5, g6, g7, g8]
Figura 1.68a:
RegionPlot$[-y$^$2 + z$^2>=$1, \{y, -3{,}3, 3{,}3\}, \{z, -3, 3\},$ Axes $\rightarrow$ True,
AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{y, z\}$, Ticks $\rightarrow \{\{0\}, \{-1, 0, 1\}\}$,
Frame $\rightarrow$ False]
Figura 1.68b:
RegionPlot$[-x$^$2 + z$^2>=$1, \{x, -3{,}3, 3{,}3\}, \{z, -3, 3\},$ Axes $\rightarrow$ True,
AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, z\}$, Ticks $\rightarrow \{\{0\}, \{-1, 0, 1\}\}$,
Frame $\rightarrow$ False]
Figura 1.69:
RegionPlot3D$[-x$^$2 - y$^$2 + z$^2>=$1, \{x, -3{,}3, 3{,}3\}, \{y, -3{,}3, 3{,}3\}, \{z, -3, 3\},$
Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y, z\}$, PlotPoints $\rightarrow 60]$
Figura 1.70:
RegionPlot3D$[-(x - 1)$^$2 - (y + 1)$^$2 + (z - 2)$^$2 \geq 1, \{x, -3{,}3, 3{,}3\},$
$\{y, -3{,}3, 3{,}3\}, \{z, 0, 4\}$, Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0, 0\}$,
AxesLabel $\rightarrow \{x, y, z\}$, Ticks $\rightarrow$ False, PlotPoints $\rightarrow 40]$
Figura 1.71:
RegionPlot3D$[(x - 1)$^$2 + (y + 2)$^$2 + (z - 1)$^2<=$1, \{x, -3, 3\}, \{y, -3, 3\},$
$\{z, -3, 3\}$, Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y, z\}$,
Ticks $\rightarrow$ False, PlotPoints $\rightarrow 40]$
Figura 1.72:
RegionPlot3D$[x$^$2 + y$^$2 + z$^2<=$1, \{x, -1{,}5, 1{,}5\}, \{y, -1{,}5, 1{,}5\}, \{z, -1{,}5, 1{,}5\},$
Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y, z\}$, PlotPoints $\rightarrow 40]$
Figura 1.73:
RegionPlot3D$[x$^$2 + y$^$2 + z$^2>=$1, \{x, -1, 1\}, \{y, -1, 1\}, \{z, -1, 1\},$
Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y, z\}$, PlotPoints $\rightarrow 40,$
PlotStyle->Opacity$[0{,}2]]$
Figura 1.74:
RegionPlot3D$[x$^$2 + (y + 1)$^$2 + (z - 2)$^$2 \leq 4, \{x, -4, 4\}, \{y, -4, 4\}, \{z, -4, 4\},$
Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{y, x, z\}$, PlotPoints $\rightarrow 40]$
Figura 1.75a:
RegionPlot$[y$^$2 + z$^2<=$1, \{y, -2, 2\}, \{z, -2, 2\},$ Axes $\rightarrow$ True,
AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{y, z\}$, Ticks $\rightarrow \{\{-1, 0, 1\}, \{-1, 0, 1\}\}$,
Frame $\rightarrow$ False]
Figura 1.76:
g1 $=$ ParametricPlot3D$[\{u$Cos$[v], u$Sin$[v], 0\}, \{u, 0, 1\}, \{v, 0, 2Pi\},$
Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0, 0\}$, Ticks $\rightarrow$ False, AxesLabel $\rightarrow \{x, y, z\}$,
PlotRange $\rightarrow$ All];
g2 $=$ ParametricPlot3D$[\{u$Cos$[v], 0, u$Sin$[v]\}, \{u, 0, 1\}, \{v, 0, 2Pi\},$
PlotRange $\rightarrow$ All];
g3 $=$ ParametricPlot3D$[\{0, u$Cos$[v], u$Sin$[v]\}, \{u, 0, 1\}, \{v, 0, 2Pi\},$

PlotRange → All];
g4 = ParametricPlot3D[{uCos[v], uSin[v], 1/2}, {u, 0, Sqrt[3]/2}, {v, 0, 2Pi},
PlotRange → All];
g5 = ParametricPlot3D[{uCos[v], uSin[v], −1/2}, {u, 0, Sqrt[3]/2}, {v, 0, 2Pi},
PlotRange → All];
Show[g1, g2, g3, g4, g5]

Figura 1.77:

RegionPlot3D[(x − 1)^2/4 + y^2/9 + (z + 1)^2/16<=1, {x, −3,3, 3,3},
{y, −3,3, 3,3}, {z, −5, 5}, Axes → True, AxesOrigin → {0, 0, 0},
AxesLabel → {x, z, y}, Ticks → False, PlotPoints → 40]

Figura 1.78a:

RegionPlot[y^2/3^2 + x^2/2^2 ≤ 1, {x, −4, 4}, {y, −4, 4},
Axes → True, AxesOrigin → {0, 0}, AxesLabel → {x, y},
Ticks → {{{−2, −a}, {2, a}}, {{−3, −b}, {3, b}}}, Frame → False]

Figura 1.79:

g1 = ParametricPlot3D[{2uCos[v], 3uSin[v], 0}, {u, 0, 1}, {v, 0, 2Pi},
Axes → True, AxesOrigin → {0, 0, 0}, Ticks → False,
AxesLabel → {x, y, z}, PlotRange → All];
g2 = ParametricPlot3D[{2uCos[v], 0, 4uSin[v]}, {u, 0, 1}, {v, 0, 2Pi},
PlotRange → All];
g3 = ParametricPlot3D[{0, 3uCos[v], 4uSin[v]}, {u, 0, 1}, {v, 0, 2Pi},
PlotRange → All];
g4 = ParametricPlot3D[{Sqrt[3]uCos[v], Sqrt[27/4]uSin[v], 2}, {u, 0, 1},
{v, 0, 2Pi}, PlotRange → All];
g5 = ParametricPlot3D[{Sqrt[3]uCos[v], Sqrt[27/4]uSin[v], −2}, {u, 0, 1},
{v, 0, 2Pi}, PlotRange → All];
Show[g1, g2, g3, g4, g5]

Figura 1.80:

RegionPlot3D[x^2/4 + y^2/9 + z^2/16<=1, {x, −5, 5}, {y, −5, 5}, {z, −5, 5},
Axes → True, AxesOrigin → {0, 0, 0}, AxesLabel → {x, z, y},
Ticks → False, PlotPoints → 40]

Figura 1.82:

RegionPlot3D[(x − 1)^2/4 + y^2 + (z + 1)^2/16<=1, {x, −3,3, 3,3}, {y, −3,3, 3,3},
{z, −5, 5}, Axes → True, AxesOrigin → {0, 0, 0}, AxesLabel → {x, y, z},
PlotPoints → 60]

Figura 1.83:

RegionPlot3D[4x^2/4 + y^2 + (z − 3)^2/2 ≤ 8, {x, −8, 8}, {y, −8, 8}, {z, −5, 10},
Axes → True, AxesOrigin → {0, 0, 0}, AxesLabel → {x, y, z}, PlotPoints → 60]

Figura 1.85:

RegionPlot3D[1<=x^2 + y^2 + z^2 ≤ 4, {x, −2,5, 2,5}, {y, −2,5, 2,5},
{z, −2,5, 2,5}, Axes → True, AxesOrigin → {0, 0, 0}, AxesLabel → {x, z, y},
PlotPoints → 40, PlotStyle->Opacity[0,3]]

Figura 1.86:

RegionPlot3D[x^2 + y^2 + z^2 ≤ 2y, {x, −2,5, 2,5}, {y, −2,5, 2,5}, {z, −2,5, 2,5},

Axes $\to$ True, AxesOrigin $\to \{0, 0, 0\}$, AxesLabel $\to \{y, z, x\}$, PlotPoints $\to 40]$
Figura 1.87:
R1 = RegionPlot3D$[x\verb|^|2 + y\verb|^|2 + z\verb|^|2 \leq 1\&\&x\verb|^|2 + y\verb|^|2 + z\verb|^|2 \leq 2y, \{x, -2, 2\},$
$\{y, -2, 2\}, \{z, -2, 2\}$, Axes $\to$ True, AxesOrigin $\to \{0, 0, 0\}$,
AxesLabel $\to \{x, z, y\}$, PlotPoints $\to 40]$;
R2 = RegionPlot3D$[x\verb|^|2 + y\verb|^|2 + z\verb|^|2 \leq 1, \{x, -2, 2\}, \{y, -2, 2\}, \{z, -1{,}5, 1{,}5\}$,
Axes $\to$ True, AxesOrigin $\to \{0, 0, 0\}$, AxesLabel $\to \{x, z, y\}$,
PlotPoints $\to 40$, PlotStyle->Opacity[0,1]];
R3 = RegionPlot3D$[x\verb|^|2 + y\verb|^|2 + z\verb|^|2 \leq 2y$,
$\{x, -2, 2\}, \{y, -2, 2\}, \{z, -1{,}5, 1{,}5\}$, Axes $\to$ True, AxesOrigin $\to \{0, 0, 0\}$,
AxesLabel $\to \{x, z, y\}$, PlotPoints $\to 40$, PlotStyle->Opacity[0,1]];
Show[R1, R2, R3]
Figura 1.88:
RegionPlot$[x\verb|^|2 + z\verb|^|2 \leq 3/4, \{x, -2, 2\}, \{z, -2, 2\}$, Axes $\to$ True,
AxesOrigin $\to \{0, 0\}$, AxesLabel $\to \{x, z\}$,
Ticks $\to \left\{\left\{-\sqrt{3}/2, 0, \sqrt{3}/2\right\}, \left\{-\sqrt{3}/2, 0, \sqrt{3}/2\right\}\right\}$,
Frame $\to$ False]
Figura 1.89:
RegionPlot3D$[x\verb|^|2 + y\verb|^|2 \leq z\verb|^|2\&\&x\verb|^|2 + y\verb|^|2 + z\verb|^|2 \leq 4$,
$\{x, -3, 3\}, \{y, -3, 3\}, \{z, 0, 3\}$, Axes $\to$ True, AxesOrigin $\to \{0, 0, 0\}$,
AxesLabel $\to \{x, y, z\}$, PlotPoints $\to 60]$
Figura 1.91:
RegionPlot3D$[x\verb|^|2 + y\verb|^|2 \leq z\&\&z \leq \sqrt{x\verb|^|2 + y\verb|^|2}$,
$\{x, -1{,}5, 1{,}5\}, \{y, -1{,}5, 1{,}5\}, \{z, 0, 0{,}95\}$, Axes $\to$ True, AxesOrigin $\to \{0, 0, 0\}$,
AxesLabel $\to \{x, y, z\}$, PlotPoints $\to 100$, PlotStyle->Opacity[0,4]]

Capítulo 2

Figura 2.1:
ContourPlot3D$[\{1 - y\verb|^|2 == z\}, \{x, -2, 2\}, \{y, -1/2, 1/2\}, \{z, -1, 1\}$,
Axes $\to$ True, AxesOrigin $\to \{0, 0, 0\}$, AxesLabel $\to \{z, y, x\}$,
Ticks $\to$ False, PlotPoints $\to 40]$
Figura 2.2:
RegionPlot3D$[1 - y\verb|^|2$>=$z, \{x, -2, 2\}, \{y, -1/2, 1/2\}, \{z, 0, 1\}$, Axes $\to$ True,
AxesOrigin $\to \{0, 0, 0\}$, AxesLabel $\to \{y, x, z\}$, Ticks $\to$ False,
PlotPoints $\to 40]$
Figura 2.3:
RegionPlot3D$[x\verb|^|2 + y\verb|^|2 \leq 4 - z\&\&0 \leq z, \{x, -1, 1\}, \{y, -1, 1\}, \{z, 0, 4\}$,
Axes $\to$ True, AxesOrigin $\to \{0, 0, 0\}$, AxesLabel $\to \{x, y, z\}$, PlotPoints $\to 40]$
Figura 2.4:
g1 = RegionPlot$[0 \leq x \leq 2\&\&0 \leq y \leq 4, \{x, -{,}25, 3\}, \{y, -{,}5, 4\}$,
Axes $\to$ True, AxesOrigin $\to \{0, 0\}$, AxesLabel $\to \{x, y\}$,
Ticks $\to \{\{0, 1, 2\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$, Frame $\to$ False];
recta = ContourPlot$[\{y == x\}, \{x, 0, 2\}, \{y, 0, 4\}$, Axes $\to$ True,
AxesOrigin $\to \{0, 0\}$, AxesLabel $\to \{x, y\}$, Ticks $\to \{\{0, 1, 2\}, \{1, 2\}\}$,

Frame $\rightarrow$ False];
Show[g1, recta]
Figura 2.5:
RegionPlot[$0 \leq x \leq 2\&\& - x \leq y \leq x, \{x, -,25, 3\}, \{y, -2{,}5, 2{,}5\}$,
Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y\}$,
Ticks $\rightarrow \{\{0, 1, 2\}, \{-2, -1, 1, 2\}\}$, Frame $\rightarrow$ False]
Figura 2.6:
RegionPlot[$0 \leq x \leq 1\&\&x\hat{}2 \leq y \leq 1, \{x, -,25, 2\}, \{y, 0, 2\}$, Axes $\rightarrow$ True,
AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y\}$, Ticks $\rightarrow \{\{0, 1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$,
Frame $\rightarrow$ False]
Figura 2.7:
RegionPlot[$0 \leq x \leq 1\&\&0 \leq y \leq \sqrt{x}, \{x, -,25, 2\}, \{y, 0, 2\}$, Axes $\rightarrow$ True,
AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{y, x\}$, Ticks $\rightarrow \{\{0, 1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$,
Frame $\rightarrow$ False]
Figura 2.8:
RegionPlot[$0 \leq x \leq 1\&\&0 \leq y \leq 2x, \{x, -,25, 2\}, \{y, 0, 2\}$, Axes $\rightarrow$ True,
AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{y, x\}$, Ticks $\rightarrow \{\{0, \{1, a\}\}, \{0, \{2, b\}\}\}$,
Frame $\rightarrow$ False]
Figura 2.9:
g1 $=$ RegionPlot[$0 \leq x \leq 1\&\&0 \leq y \leq 1, \{x, -2, 2\}, \{y, -1, 4\}$, Axes $\rightarrow$ True,
AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y\}$, Ticks $\rightarrow \{\{-1, 0, 1, 2, 3\}, \{-1, 1, 2\}\}$,
Frame $\rightarrow$ False];
g2 $=$ RegionPlot[$-1 \leq y \leq 3\&\&1 \leq x \leq 2, \{x, -2, 2\}, \{y, -1, 4\}$, Axes $\rightarrow$ True,
AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y\}$, Ticks $\rightarrow \{\{-1, 0, 1, 2, 3\}, \{-1, 1, 2\}\}$,
Frame $\rightarrow$ False];
g3 $=$ RegionPlot[$-1 \leq x \leq 0\&\&2 \leq y \leq 4, \{x, -2, 2\}, \{y, -1, 4\}$, Axes $\rightarrow$ True,
AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y\}$, Ticks $\rightarrow \{\{-1, 0, 1, 2, 3\}, \{-1, 1, 2\}\}$,
Frame $\rightarrow$ False];
Show[g1, g2, g3]
Figura 2.10:
RegionPlot3D[$0 \leq x \leq \pi/2\&\&0 \leq y \leq 1\&\&0 \leq z \leq$ Cos[x], $\{x, -,5, 2\}$,
$\{y, -,5, 1{,}5\}, \{z, 0, 1{,}5\}$, Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0, 0\}$,
AxesLabel $\rightarrow \{x, y, z\}$, PlotPoints $\rightarrow 40$]
Figura 2.11a:
ContourPlot3D[$\{x + y == 2\}, \{x, -3, 3\}, \{y, -3, 3\}, \{z, -1{,}5, 1{,}5\}$, Axes $\rightarrow$ True,
AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y, z\}$, PlotPoints $\rightarrow 40$]
Figura 2.11b:
ContourPlot3D[$\{x + 2y == 6\}, \{x, -3, 3\}, \{y, -3, 3\}, \{z, -1{,}5, 1{,}5\}$,
Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y, z\}$,
PlotPoints $\rightarrow 40$]
Figura 2.11c:
RegionPlot3D[$z\hat{}2 + y\hat{}2 \leq 4\&\&0 \leq y\&\&0 \leq x\&\&0 \leq z, \{x, 0, 6\}, \{y, -,5, 2{,}5\}$,
$\{z, -,5, 2{,}5\}$, Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0, 0\}$,
AxesLabel $\rightarrow \{x, y, z\}$, PlotPoints $\rightarrow 40$]

Figura 2.12:
RegionPlot3D$[z\char`^2+y\char`^2\leq 4\&\&2\leq x+y\&\&2y+x\leq 6,\{x,0,6\},\{y,0,2{,}5\},$
$\{z,-{,}5,2{,}5\}$, Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow\{0,0,0\}$, AxesLabel $\rightarrow\{x,y,z\}$,
PlotPoints $\rightarrow 40]$
Figura 2.13a:
RegionPlot$[2\leq x+y\&\&2y+x\leq 6,\{x,0,6\},\{y,0,2\}$, Axes $\rightarrow$ True,
AxesOrigin $\rightarrow\{0,0\}$, AxesLabel $\rightarrow\{x,y\}$, Ticks $\rightarrow\{\{0,1,6\},\{0,1,2\}\}$,
Frame $\rightarrow$ False]
Figura 2.13b:
RegionPlot$[z\char`^2\leq 4\&\&0\leq x\leq 6,\{x,0,6\},\{z,0,3\}$, Axes $\rightarrow$ True,
AxesOrigin $\rightarrow\{0,0\}$, AxesLabel $\rightarrow\{x,z\}$, Ticks $\rightarrow\{\{0,1,6\},\{0,1,2\}\}$,
Frame $\rightarrow$ False]
Figura 2.13c:
RegionPlot$[z\char`^2+y\char`^2\leq 4\&\&0\leq y\&\&0\leq z,\{y,0,2{,}5\},\{z,0,2{,}5\}$,
Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow\{0,0\}$, AxesLabel $\rightarrow\{y,z\}$,
Ticks $\rightarrow\{\{0,1,2\},\{0,1,2\}\}$, Frame $\rightarrow$ False]

Capítulo 3

Figura 3.1a:
RegionPlot$[x\char`^2+y\char`^2\leq 4,\{x,-2{,}5,2{,}5\},\{y,-2{,}5,2{,}5\}$, Axes $\rightarrow$ True,
AxesOrigin $\rightarrow\{0,0\}$, AxesLabel $\rightarrow\{x,y\}$,
Ticks $\rightarrow\{\{-2,-1,0,1,2\},\{-2,-1,0,1,2\}\}$, Frame $\rightarrow$ False]
Figura 3.1b:
RegionPlot$[0\leq x\leq 2\&\&0\leq y\leq 2\pi,\{x,-0{,}5,2{,}5\},\{y,-{,}5,7\}$, Axes $\rightarrow$ True,
AxesOrigin $\rightarrow\{0,0\}$, AxesLabel $\rightarrow\{r,\theta\}$, Ticks $\rightarrow\{\{0,1,2\},\{0,\pi,2\pi\}\}$,
Frame $\rightarrow$ False]
Figura 3.2a:
g1 $=$ RegionPlot$[1\leq y-x\leq 2\&\&1\leq y+x\leq 2,\{x,-1,1\},\{y,0,2\}$,
Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow\{0,0\}$, AxesLabel $\rightarrow\{x,y\}$,
Ticks $\rightarrow\{\{-1,-{,}5,0,{,}5,1\},\{0,1,2\}\}$, Frame $\rightarrow$ False];
recta1 $=$ ContourPlot$[y-x{=}{=}1,\{x,-1,1\},\{y,0{,}5,3\}$, Axes $\rightarrow$ True,
AxesOrigin $\rightarrow\{0,0\}$, AxesLabel $\rightarrow\{x,y\}$,
Ticks $\rightarrow\{\{-3,-2,-1,0,1,2,3\},\{-2,-1,1,2\}\}$, Frame $\rightarrow$ False];
recta2 $=$ ContourPlot$[y-x==2,\{x,-1,1\},\{y,{,}5,3\}$, Axes $\rightarrow$ True,
AxesOrigin $\rightarrow\{0,0\}$, AxesLabel $\rightarrow\{x,y\}$,
Ticks $\rightarrow\{\{-3,-2,-1,0,1,2,3\},\{-2,-1,1,2\}\}$, Frame $\rightarrow$ False];
recta3 $=$ ContourPlot$[y+x{=}{=}1,\{x,-4,4\},\{y,{,}5,3\}$, Axes $\rightarrow$ True,
AxesOrigin $\rightarrow\{0,0\}$, AxesLabel $\rightarrow\{x,y\}$,
Ticks $\rightarrow\{\{-3,-2,-1,0,1,2,3\},\{-2,-1,1,2\}\}$, Frame $\rightarrow$ False];
recta4 $=$ ContourPlot$[y+x==2,\{x,-4,4\},\{y,{,}5,3\}$, Axes $\rightarrow$ True,
AxesOrigin $\rightarrow\{0,0\}$, AxesLabel $\rightarrow\{x,y\}$,
Ticks $\rightarrow\{\{-3,-2,-1,0,1,2,3\},\{-2,-1,1,2\}\}$, Frame $\rightarrow$ False];
Show[g1, recta1, recta2, recta3, recta4]
Figura 3.2b:

RegionPlot$[1 \leq x \leq 2\&\&1 \leq y \leq 2, \{x, 0, 2{,}5\}, \{y, 0, 2{,}5\}$, Axes $\rightarrow$ True,
AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{u, v\}$,
Ticks $\rightarrow \{\{0, 1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$, Frame $\rightarrow$ False]

Figura 3.3a:

RegionPlot$[0 \leq x \leq 1\&\&2x \leq y \leq -2x + 4, \{x, -{,}5, 2{,}5\}, \{y, -{,}5, 4{,}5\}$,
Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y\}$,
Ticks $\rightarrow \{\{0, 1\}, \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$, Frame $\rightarrow$ False]

Figura 3.3b:

RegionPlot$[0 \leq x \leq 4\&\&0 \leq y \leq x, \{x, -{,}5, 4{,}5\}, \{y, -{,}5, 4{,}5\}$, Axes $\rightarrow$ True,
AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{u, v\}$, Ticks $\rightarrow \{\{0, 1, 2, 3, 4\}, \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$,
Frame $\rightarrow$ False]

Figura 3.4:

g1 $=$ RegionPlot$[1/x \leq y \leq 4/x\&\&1 \leq y/x \leq 2\&\&x \geq 0\&\&y \geq 0, \{x, 0, 3\}$,
$\{y, 0, 3\}$, Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y\}$,
Ticks $\rightarrow \{\{0, 1, 2\}, \{0, 1, 2, 3\}\}$, Frame $\rightarrow$ False];
recta1 $=$ ContourPlot$[y{==}1/x, \{x, 0, 3\}, \{y, 0, 3\}$, Axes $\rightarrow$ True,
AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y\}$,
Ticks $\rightarrow \{\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}, \{-2, -1, 1, 2\}\}$, Frame $\rightarrow$ False];
recta2 $=$ ContourPlot$[y == 4/x, \{x, 0, 3\}, \{y, 0, 3\}$, Axes $\rightarrow$ True,
AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y\}$,
Ticks $\rightarrow \{\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}, \{-2, -1, 1, 2\}\}$, Frame $\rightarrow$ False];
recta3 $=$ ContourPlot$[y/x{==}1, \{x, 0, 3\}, \{y, 0, 3\}$, Axes $\rightarrow$ True,
AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y\}$,
Ticks $\rightarrow \{\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}, \{-2, -1, 1, 2\}\}$, Frame $\rightarrow$ False];
recta4 $=$ ContourPlot$[y/x == 2, \{x, 0, 3\}, \{y, 0, 3\}$, Axes $\rightarrow$ True,
AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y\}$,
Ticks $\rightarrow \{\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}, \{-2, -1, 1, 2\}\}$, Frame $\rightarrow$ False];
Show[g1, recta1, recta2, recta3, recta4]

Figura 3.7:

RegionPlot3D$[(z - 1){}^\wedge 2 + y{}^\wedge 2 \leq 4\&\& - 2 \leq x \leq 2\&\&y \leq 0, \{x, -2{,}5, 2{,}5\}$,
$\{y, -2{,}5, 2{,}5\}, \{z, -1{,}5, 3{,}5\}$, Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0, 0\}$,
AxesLabel $\rightarrow \{x, y, z\}$, PlotPoints $\rightarrow 40]$

Figura 3.8:

RegionPlot$[y{}^\wedge 2 \leq z{}^\wedge 2\&\&z \geq 0, \{y, -1, 1\}, \{z, -{,}5, 1\}$, Axes $\rightarrow$ True,
AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0\}$, Ticks $\rightarrow \{\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}, \{-2, -1, 1, 2\}\}$,
AxesLabel $\rightarrow \{y, z\}$,
Frame $\rightarrow$ False]

Figura 3.10:

g1 $=$ RegionPlot$[-5 \leq x \leq 0\&\& - x \leq y \leq \sqrt{25 - x{}^\wedge 2}, \{x, -5{,}5, 5{,}5\}$,
$\{y, -{,}5, 5{,}5\}$, Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{y, z\}$,
Ticks $\rightarrow \{\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, \{0, 5\}\}$, Frame $\rightarrow$ False];
g2 $=$ RegionPlot$[0 \leq x \leq 5\&\&x \leq y{<=}\sqrt{25 - x{}^\wedge 2}, \{x, -5{,}5, 5{,}5\}$,
$\{y, -{,}5, 5{,}5\}$, Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{y, z\}$,
Ticks $\rightarrow \{\{0, 5\}, \{0, 5\}\}$, Frame $\rightarrow$ False];

Show[g1, g2]
Figura 3.12:
RegionPlot3D[x^2 + y^2 $\leq$ z^2&&1 $\leq z \leq 3$, {x, −3,5, 3,5}, {y, −3,5, 3,5},
{z, −,5, 3,5}, Axes → True, AxesOrigin → {0, 0, 0},
AxesLabel → {y, x, z}, PlotPoints → 40]
Figura 3.13:
RegionPlot3D[x^2 + y^2 + z^2 $\leq$ 4&&$x \leq 1$, {x, −2,5, 2,5}, {y, −2,5, 2,5},
{z, −2,5, 2,5}, Axes → True, AxesOrigin → {0, 0, 0},
AxesLabel → {y, x, z}, PlotPoints → 40]

Capítulo 4

Figura 4.1:
ContourPlot[y == x^2 + 1, {x, −1, 1}, {y, −,5, 3}, Axes → True,
AxesOrigin → {0, 0}, AxesLabel → {x, y},
Ticks → {{−3, −2, −1, 0, 1, 2, 3}, {−2, −1, 1, 2}}, Frame → False]
Figura ??:
ContourPlot[y == x − 3, {x, −1, 1}, {y, −4,5, 1}, Axes → True,
AxesOrigin → {0, 0}, AxesLabel → {x, y},
Ticks → {{−1, 0, 1}, {−3, −2, −1, 1}}, Frame → False]
Figura 4.4:
g1 = RegionPlot[1 $\leq x \leq$ 2&&1 $\leq y \leq 2$, {x, 0, 2,5}, {y, 0, 2,5}, Axes → True,
AxesLabel → {x, y}, AxesOrigin → {0, 0},
Ticks → {{0, {1, a}, {2, b}}, {{1, c}, {2, d}}}, Frame → False];
recta1 = ContourPlot[y==1, {x, 1, 2}, {y, 0, 2}, Axes → True,
AxesOrigin → {0, 0}, AxesLabel → {x, y},
Ticks → {{0, {1, a}, {2, b}}, {{1, c}, {2, d}}}, Frame → False];
recta2 = ContourPlot[y == 2, {x, 1, 2}, {y, 1, 3}, Axes → True,
AxesOrigin → {0, 0}, AxesLabel → {x, y},
Ticks → {{0, {1, a}, {2, b}}, {{1, c}, {2, d}}}, Frame → False];
recta3 = ContourPlot[x==1, {x, 0, 2}, {y, 1, 2}, Axes → True,
AxesOrigin → {0, 0}, AxesLabel → {x, y},
Ticks → {{0, {1, a}, {2, b}}, {{1, c}, {2, d}}},
Frame → False];
recta4 = ContourPlot[x == 2, {x, 1, 3}, {y, 1, 2}, Axes → True,
AxesOrigin → {0, 0}, AxesLabel → {x, y},
Ticks → {{0, {1, a}, {2, b}}, {{1, c}, {2, d}}}, Frame → False];
Show[g1, recta1, recta2, recta3, recta4]
Figura 4.5:
Graphics[Line[{{1, 0}, {2, 1}, {3, 0}, {4, 1}, {5, 1}, {5, 0}}]]
Figura 4.7:
ParametricPlot[{Sin[u], Sin[2u]}, {u, 0, 2Pi}, Axes → False]
Figura 4.9:
ParametricPlot[{uSin[u], uCos[u]}, {u, 0, 2Pi}, Axes → False]
Figura 4.10:

curva $=$ ParametricPlot3D$[\{t, 1-t-$ Sin$[t]$, Sin$[t]\}, \{t, 0,$ Pi$\}$, Axes $\rightarrow$ True,
AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y, z\}$, PlotStyle-$>\{$Red, Thick$\}]$;
sup1 $=$ ContourPlot3D$[z ==$ Sin$[x], \{x, 0, 4\}, \{y, -2{,}3, 1\}, \{z, -1, 1\}$,
Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y, z\}$,
ContourStyle $\rightarrow$ Directive[Opacity$[0{,}5]]]$;
sup2 $=$ ContourPlot3D$[z == 1-x-y, \{x, 0, 4\}, \{y, -2{,}3, 1\}, \{z, -1, 1{,}5\}$,
Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y, z\}$,
ContourStyle $\rightarrow$ Directive[Opacity$[0{,}2]]]$;
Show[curva, sup1, sup2, PlotRange $\rightarrow$ All]
Figura 4.12:
curva $=$ ParametricPlot3D$[\{$Cos$[t]$, 2Sin$[t] + 1, 1\}, \{t, 0,$ 2Pi$\}$, Axes $\rightarrow$ True,
AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y, z\}$, PlotStyle-$>\{$Black, Thick$\}]$;
sup1 $=$ ContourPlot3D$[z == 1, \{x, -2, 2\}, \{y, -2, 4\}, \{z, -1, 1\}$, Axes $\rightarrow$ True,
AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y, z\}$,
ContourStyle $\rightarrow$ Directive[Opacity$[0{,}5]]]$;
Show[curva, sup1, PlotRange $\rightarrow$ All]
Figura 4.14:
s1 $=$ RegionPlot3D$[x\wedge 2 + (y-2)\wedge 2 \leq 4\&\&z \leq x\wedge 2 + y\wedge 2, \{x, -2{,}2, 2{,}2\}$,
$\{y, -{,}2, 4{,}2\}, \{z, 0, 16\}$, Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0, 0\}$,
AxesLabel $\rightarrow \{x, y, z\}$, PlotPoints $\rightarrow 100$,
PlotStyle $\rightarrow$ Directive[Opacity$[0{,}4]]]$;
curva $=$ ParametricPlot3D$[\{$2Cos$[t]$, 2Sin$[t] + 2$, (2Cos$[t])\wedge 2+$
(2Sin$[t] + 2)\wedge 2\}, \{t, 0,$ 2Pi$\}$, Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0, 0\}$,
AxesLabel $\rightarrow \{x, y, z\}$, PlotStyle-$>\{$Thick$\}]$;
sup1 $=$ ContourPlot3D$[z == x\wedge 2 + y\wedge 2, \{x, -2{,}2, 2{,}2\}, \{y, -2{,}2, 4{,}2\}, \{z, 0, 16\}$,
Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y, z\}$,
ContourStyle $\rightarrow$ Directive[Opacity$[0{,}1]]]$;
Show[s1, curva, sup1]
Figura 4.15:
curva1 $=$ ContourPlot$[y == x, \{x, 0, 1\}, \{y, -{,}5, 1{,}1\}$, Axes $\rightarrow$ True,
AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y\}$, ContourStyle-$>\{$Thick$\}$,
Frame $\rightarrow$ False];
curva2 $=$ ContourPlot$[y == x\wedge 2, \{x, 0, 1\}, \{y, -{,}5, 1{,}1\}$, Axes $\rightarrow$ True,
AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y\}$,
ContourStyle-$>\{$Thick$\}$, Frame $\rightarrow$ False];
Show[curva1, curva2, g1]
Figura 4.16:
curva $=$ ParametricPlot3D$[\{$2Cos$[t]$, 2Sin$[t], 2-$ 2Sin$[t]\}, \{t, 0,$ 2Pi$\}$,
Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y, z\}$,
PlotStyle-$>\{$Thick$\}]$;
sup1 $=$ ContourPlot3D$[z + y == 2, \{x, -2{,}2, 2{,}2\}, \{y, -2{,}2, 2{,}2\}, \{z, -1, 4{,}5\}$,
Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y, z\}$,
ContourStyle $\rightarrow$ Directive[Opacity$[0{,}3]]]$;
sup2 $=$ ContourPlot3D$[4 == x\wedge 2{+}y\wedge 2, \{x, -2{,}2, 2{,}2\}, \{y, -2{,}2, 2{,}2\}, \{z, -1, 4{,}5\}$,

Axes $\to$ True, AxesOrigin $\to \{0, 0, 0\}$, AxesLabel $\to \{x, y, z\}$,
ContourStyle $\to$ Directive[Opacity[0,3]]];
Show[curva, sup1, sup2, PlotRange $\to$ All]

Figura 4.17:

curva $=$ ParametricPlot3D[$\{2 - t, t,$ Cos[t]$\}, \{t, 0,$ Pi$/2\}$, Axes $\to$ True,
AxesOrigin $\to \{0, 0, 0\}$, AxesLabel $\to \{x, y, z\}$, PlotStyle->$\{$Thick$\}$]

Figura 4.18:

curva $=$ ParametricPlot3D[$\{t, 1 - t, t\hat{}2 + (1 - t)\hat{}2\}, \{t, 0, 1\}$, Axes $\to$ True,
AxesOrigin $\to \{0, 0, 0\}$, AxesLabel $\to \{x, y, z\}$, PlotStyle->$\{$Thick$\}$];
sup1 $=$ ContourPlot3D[$x + y == 1, \{x, -1, 1\}, \{y, -1, 1\}, \{z, 0, 1\}$,
Axes $\to$ True, AxesOrigin $\to \{0, 0, 0\}$, AxesLabel $\to \{x, y, z\}$,
ContourStyle $\to$ Directive[Opacity[0,3]]];
sup2 $=$ ContourPlot3D[$z == x\hat{}2 + y\hat{}2, \{x, -2{,}2, 2{,}2\}, \{y, -1, 1\}, \{z, 0, 1\}$,
Axes $\to$ True, AxesOrigin $\to \{0, 0, 0\}$, AxesLabel $\to \{x, y, z\}$,
ContourStyle $\to$ Directive[Opacity[0,3]]];
Show[curva, sup1, sup2, PlotRange $\to$ All]

Figura 4.19:

curva $=$ ParametricPlot3D[$\{t\hat{}2, 1 - 2t, t\}, \{t, 0, 1/2\}$, Axes $\to$ True,
AxesOrigin $\to \{0, 0, 0\}$, AxesLabel $\to \{x, y, z\}$, PlotStyle->$\{$Thick$\}$];
sup1 $=$ ContourPlot3D[$x == z\hat{}2, \{x, 0, 1\}, \{y, 0, 1\}, \{z, 0, 1\}$,
Axes $\to$ True, AxesOrigin $\to \{0, 0, 0\}$, AxesLabel $\to \{x, y, z\}$,
ContourStyle $\to$ Directive[Opacity[0,3]]];
sup2 $=$ ContourPlot3D[$y + 2z == 1, \{x, 0, 1\}, \{y, 0, 1\}, \{z, 0, 1\}$,
Axes $\to$ True, AxesOrigin $\to \{0, 0, 0\}$, AxesLabel $\to \{x, y, z\}$,
ContourStyle $\to$ Directive[Opacity[0,3]]];
Show[curva, sup1, sup2, PlotRange $\to$ All]

Figura 4.20:

curva1 $=$ ParametricPlot3D[$\{t, 0, 2 - t\}, \{t, 0, 1\}$, Axes $\to$ True,
AxesOrigin $\to \{0, 0, 0\}$, AxesLabel $\to \{x, y, z\}$, PlotStyle->$\{$Thick$\}$];
curva2 $=$ ParametricPlot3D[$\{0, t, 2 - t\}, \{t, 0, 1\}$, Axes $\to$ True,
AxesOrigin $\to \{0, 0, 0\}$, AxesLabel $\to \{x, y, z\}$, PlotStyle->$\{$Thick$\}$];
curva3 $=$ ParametricPlot3D[$\{t, 1 - t, 1\}, \{t, 0, 1\}$, Axes $\to$ True,
AxesOrigin $\to \{0, 0, 0\}$, AxesLabel $\to \{x, y, z\}$, PlotStyle->$\{$Thick$\}$];
Show[curva1, curva2, curva3]

Capítulo 5

Figura 5.1:

ContourPlot3D[$\{x\hat{}2/4 - y\hat{}2 == z\}, \{x, -2, 2\}, \{y, -1/2, 1/2\}, \{z, -1, 1\}$,
Axes $\to$ False, AxesOrigin $\to \{0, 0, 0\}$, AxesLabel $\to \{z, y, x\}$,
Ticks $\to$ False, PlotPoints $\to 40$]

Figura 5.2:

ContourPlot3D[$\{x + 2y == z\}, \{x, 0, 2\}, \{y, 0, 1/2\}, \{z, 0, 1\}$, Axes $\to$ True,
AxesOrigin $\to \{0, 0, 0\}$, AxesLabel $\to \{x, y, z\}$, PlotPoints $\to 40$]

Figura 5.3:

ContourPlot3D[$\{x == 2\}, \{x, 0, 2{,}5\}, \{y, -1, 3\}, \{z, 2, 4\}$, Axes $\to$ True,
AxesOrigin $\to \{0, 0, 0\}$, AxesLabel $\to \{x, y, z\}$, PlotPoints $\to 40$]
Figura 5.4:
ContourPlot3D[$\{x^\wedge 2 + (y - 1)^\wedge 2 == 1\}, \{x, -1, 2{,}5\}, \{y, -1, 3\}, \{z, 0, 2\}$,
Axes $\to$ True, AxesOrigin $\to \{0, 0, 0\}$,
AxesLabel $\to \{x, y, z\}$, PlotPoints $\to 40$]
Figura 5.5:
RegionPlot3D[$0 \leq x \leq 1\&\&1 \leq y \leq 2\&\&2 \leq z \leq 3, \{x, -1, 1{,}5\}, \{y, -1, 3\}$,
$\{z, 0, 3\}$, Axes $\to$ True, AxesOrigin $\to \{0, 0, 0\}$,
AxesLabel $\to \{x, y, z\}$, PlotPoints $\to 40$, PlotStyle->Opacity[0,2]]
Figura 5.6a:
ContourPlot3D[$\{z == 2\}, \{x, 0, 1\}, \{y, 1, 2\}, \{z, 0, 2{,}5\}$, Axes $\to$ True,
AxesOrigin $\to \{0, 0, 0\}$, AxesLabel $\to \{x, y, z\}$, PlotPoints $\to 40$]
Figura 5.7a:
ContourPlot3D[$\{y == 1\}, \{x, 0, 1\}, \{y, 0, 2\}, \{z, 2, 3\}$, Axes $\to$ True,
AxesOrigin $\to \{0, 0, 0\}$, AxesLabel $\to \{x, y, z\}$, PlotPoints $\to 40$]
Figura 5.8a:
ContourPlot3D[$\{x == 0\}, \{x, -,5, 1\}, \{y, 1, 2\}, \{z, 2, 3\}$, Axes $\to$ True,
AxesOrigin $\to \{0, 0, 0\}$, AxesLabel $\to \{x, y, z\}$, PlotPoints $\to 40$]
Figura 5.9:
ContourPlot3D[$\{x^\wedge 2 + y^\wedge 2 + z^\wedge 2 == 4\}, \{x, -2{,}2, 2{,}2\}, \{y, -2{,}2, 2{,}2\}$,
$\{z, -2{,}2, 2{,}2\}$, Axes $\to$ True, AxesOrigin $\to \{0, 0, 0\}$,
AxesLabel $\to \{x, z, y\}$, PlotPoints $\to 40$]
Figura 5.10:
ContourPlot3D[$\{x^\wedge 2 + y^\wedge 2 + z^\wedge 2 == 4\}, \{x, -2{,}2, 2{,}2\}, \{y, -2{,}2, 2{,}2\}$,
$\{z, -2{,}8, 0\}$, Axes $\to$ True, AxesOrigin $\to \{0, 0, 0\}$,
AxesLabel $\to \{y, x, z\}$, PlotPoints $\to 40$]
Figura 5.11:
ContourPlot3D[$\{x^\wedge 2 == z\}, \{x, -2{,}2, 2{,}2\}, \{y, -1, 1\}, \{z, 0, 4\}$,
Axes $\to$ True, AxesOrigin $\to \{0, 0, 0\}$,
AxesLabel $\to \{y, x, z\}$, PlotPoints $\to 40$]
Figura 5.12:
ContourPlot3D[$\{x^\wedge 2 + y^\wedge 2 == z\}, \{x, -2{,}2, 2{,}2\}, \{y, -2{,}2, 2{,}2\}, \{z, 0, 4\}$,
Axes $\to$ True, AxesOrigin $\to \{0, 0, 0\}$,
AxesLabel $\to \{y, x, z\}$, PlotPoints $\to 40$]
Figura 5.13:
ContourPlot3D[$\{3x^\wedge 2 + y^\wedge 2 == z^\wedge 2\}, \{x, -3, 3\}, \{y, -4, 4\}, \{z, 0, 4\}$,
Axes $\to$ True, AxesOrigin $\to \{0, 0, 0\}$, AxesLabel $\to \{y, x, z\}$,
PlotPoints $\to 40$]
Figura 5.14:
ContourPlot3D[$\{y^\wedge 2 + x^\wedge 2 == 1\}, \{x, -1, 1\}, \{y, 0, 1\}, \{z, 0, 4\}$,
Axes $\to$ True, AxesOrigin $\to \{0, 0, 0\}$, AxesLabel $\to \{y, x, z\}$,
PlotPoints $\to 40$]
Figura 5.15:

RegionPlot3D[2y + x + z<=2, {x, 0, 2}, {y, 0, 1}, {z, 0, 4}, Axes → True,
AxesOrigin → {0, 0, 0}, AxesLabel → {x, y, z}, PlotPoints → 40]

Figura 5.16a:

ParametricPlot3D[{x, 0, z}, {x, 0, 2}, {z, 0, 2 − x}, Axes → True,
AxesOrigin → {0, 0, 0}, AxesLabel → {y, x, z}, PlotPoints → 40]

Figura 5.17b:

ParametricPlot3D[{x, y, 2 − x − 2y}, {y, 0, 1}, {x, 0, 2 − 2y}, Axes → True,
AxesOrigin → {0, 0, 0}, AxesLabel → {x, y, z}, PlotPoints → 40]

Figura 5.18:

curva1 = Graphics[{Arrow[{{0, 0}, {0, 1}}]}];
curva2 = Graphics[{Arrow[{{0, 0}, {1, 0}}]}];
Show[curva1, curva2]

Figura 5.19:

sup = ContourPlot3D[{y^2 + x^2 == 1}, {x, −1, 1}, {y, 0, 1}, {z, 0, 4},
Axes → True, AxesOrigin → {0, 0, 0}, AxesLabel → {y, x, z},
PlotPoints → 40];
curva1 = Graphics3D[{Arrow[{{0, 1, 1}, {−1, 1, 1}}]}];
curva2 = Graphics3D[{Arrow[{{0, 1, 1}, {0, 1, 2}}]}];
Show[sup, curva1, curva2]

Figura 5.20:

ContourPlot3D[{y^2/4 + x^2 == z^2/4}, {x, −2, 2}, {y, −2, 2}, {z, 0, 1},
Axes → True, AxesOrigin → {0, 0, 0}, AxesLabel → {y, x, z},
PlotPoints → 40]

Figura 5.21:

ContourPlot3D[{y^2 + x^2 == z}, {x, −1, 1}, {y, −1, 1}, {z, 0, 1},
Axes → True, AxesOrigin → {0, 0, 0}, AxesLabel → {y, x, z},
PlotPoints → 40]

Figura 5.22:

sup1 = ContourPlot3D[{y^2 + x^2 + z^2 == 4}, {x, −2,2, 2,2}, {y, −2,2, 2,2},
{z, −2,2, 2,2}, Axes → True, AxesOrigin → {0, 0, 0}, AxesLabel → {y, x, z},
PlotPoints → 40];
sup2 = ContourPlot3D[{z == 2}, {x, −2,2, 2,2}, {y, −2,2, 2,2}, {z, −2,2, 2,2},
Axes → True, AxesOrigin → {0, 0, 0}, AxesLabel → {y, x, z}, PlotPoints → 40,
ContourStyle->Opacity[0,5]];
sup3 = ContourPlot3D[{−2x − 2z == $-4\sqrt{2}$}, {x, −2,2, 2,2}, {y, −2,2, 2,2},
{z, −2,2, 2,2}, Axes → True, AxesOrigin → {0, 0, 0}, AxesLabel → {y, x, z},
PlotPoints → 40, ContourStyle->Opacity[0,5]];
Show[sup1, sup2, sup3]

Figura 5.23:

sup1 = ParametricPlot3D[{2 − uCos[v], uCos[v], uSin[v]}, {u, 0, 1}, {v, 0, 2π},
Axes → True, AxesOrigin → {0, 0, 0}, AxesLabel → {x, y, z},
PlotPoints → 40];
sup2 = ContourPlot3D[{y^2 + z^2 == 1}, {x, −3, 3}, {y, −3, 3}, {z, −3, 3},
Axes → True, AxesOrigin → {0, 0, 0}, AxesLabel → {y, x, z}, PlotPoints → 40,

ContourStyle->Opacity[0,2]];
sup3 = ContourPlot3D[$\{x + y == 2\}, \{x, -2{,}2, 2{,}2\}, \{y, -3, 3\}, \{z, -3, 3\}$,
Axes $\to$ True, AxesOrigin $\to \{0, 0, 0\}$, AxesLabel $\to \{y, x, z\}$,
PlotPoints $\to 40$, ContourStyle->Opacity[0,2]];
Show[sup1, sup2, sup3]

Figura 5.24:

ParametricPlot3D[$\{2 - u$Cos$[v], u$Cos$[v], u$Sin$[v]\}, \{u, 0, 1\}, \{v, 0, 2\pi\}$,
Axes $\to$ True, AxesOrigin $\to \{0, 0, 0\}$, AxesLabel $\to \{x, y, z\}$,
PlotPoints $\to 40$]

Figura 5.25:

ContourPlot3D[$\{y$^$2 + x$^$2 + z$^$2 == 1\}, \{x, -1{,}2, 1{,}2\}, \{y, -1{,}6, 0\}$,
$\{z, -1{,}2, 1{,}2\}$, Axes $\to$ True, AxesOrigin $\to \{0, 0, 0\}$,
AxesLabel $\to \{x, y, z\}$, PlotPoints $\to 40$]

Figura 5.27:

ContourPlot3D[$\{4 - y$^$2 == z\}, \{x, -2, 2\}, \left\{y, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\right\}, \{z, -{,}5, 5\}$,
Axes $\to$ True, AxesOrigin $\to \{0, 0, 0\}$, AxesLabel $\to \{y, x, z\}$,
PlotPoints $\to 40$]

Figura 5.28:

ParametricPlot3D
[$\{(1 + 1/2v$Cos$[u/2])$Cos$[u], (1 + 1/2v$Cos$[u/2])$Sin$[u], v/2$Sin$[u/2]\}$,
$\{u, 0, 2$Pi$\}, \{v, -1, 1\}$, Axes $\to$ False, AxesOrigin $\to \{0, 0, 0\}$,
AxesLabel $\to \{x, y, z\}$, PlotPoints $\to 40$]

Figura 5.29:

sup = ContourPlot3D[$\{y$^$2 + x$^$2 + z$^$2 == 1\}, \{x, -2, 2\}, \{y, -2, 2\}$,
$\{z, -2, 2\}$, Axes $\to$ True, AxesOrigin $\to \{0, 0, 0\}$, AxesLabel $\to \{y, x, z\}$,
PlotPoints $\to 40$,
ContourStyle->Opacity[0,3]];
curva1 = Graphics3D[{Red, Arrow[$\{\{0, 0, 1\}, \{0, 0, 2\}\}$]}];
curva2 = Graphics3D[{Red, Arrow[$\{\{0, 1, 0\}, \{0, 2, 0\}\}$]}];
curva3 = Graphics3D[{Red, Arrow[$\{\{0, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\}$,
$\{0, \sqrt{2}/2 + 3/4, \sqrt{2}/2 + 3/4\}\}$]}];
curva4 = Graphics3D[{Red, Arrow[$\{\{1, 0, 0\}, \{2, 0, 0\}\}$]}];
curva5 = Graphics3D[{Red, Arrow[$\{\{0, 0, -1\}, \{0, 0, -2\}\}$]}];
curva6 = Graphics3D[{Arrow[$\{\{0, 0, 1\}, \{0, 0, {,}2\}\}$]}];
curva7 = Graphics3D[{Arrow[$\{\{0, 1, 0\}, \{0, {,}5, 0\}\}$]}];
curva8 = Graphics3D[{Arrow[$\{0, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\}$,
$\{0, \sqrt{2}/8, \sqrt{2}/8\}\}$]}];
curva9 = Graphics3D[{Arrow[$\{\{1, 0, 0\}, \{{,}2, 0, 0\}\}$]}];
curva10 = Graphics3D[{Arrow[$\{\{0, 0, -1\}, \{0, 0, -{,}2\}\}$]}];
Show[sup, curva1, curva2, curva3, curva4, curva5, curva6, curva7,
curva8, curva9, curva10]

Figura 5.30:

sup1 = ParametricPlot3D[$\{u$Cos$[v], u$Sin$[v], 1\}, \{u, 0, 1\}, \{v, 0, 2\pi\}$,
Axes $\to$ True, AxesOrigin $\to \{0, 0, 0\}$, AxesLabel $\to \{x, y, z\}$,

PlotPoints $\to 40]$;
curva1 $=$ Graphics3D[{Red, Arrow[$\{\{0,0,1\},\{0,0,1{,}5\}\}$]}];
curva2 $=$ Graphics3D[{Red, Arrow[$\{\{0,\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2\},$
$\{0,\sqrt{2}/\,2,\sqrt{2}/\,2+3/4\}\}$]}];
curva3 $=$ Graphics3D[{Red, Arrow[$\{\{0,-\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2\},$
$\{0,-\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2+3/4\}\}$]}];
curva4 $=$ Graphics3D[{Arrow[$\{\{0,0,1\},\{0,0,,2\}\}$]}];
curva5 $=$ Graphics3D[{Arrow[$\{\{0,\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2\},$
$\{0,\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/8\}\}$]}];
curva6 $=$ Graphics3D[{Arrow[$\{\{0,-\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/\,2\},$
$\{0,-\sqrt{2}/\,2,\sqrt{2}/\,8\}\}$]}];
Show[sup1, curva1, curva2, curva3, curva4, curva5, curva6]
Figura 5.31:
sup1 $=$ ParametricPlot3D[$\{x,y,0\},\{y,-1,1\},\{x,-1,1\}$, Axes $\to$ False,
AxesOrigin $\to \{0,0,0\}$, AxesLabel $\to \{x,y,z\}$, Ticks $\to$ False,
PlotPoints $\to 40]$;
curva1 $=$ Graphics3D[{Arrow[$\{\{0,0,0\},\{0,0,1\}\}$]}];
curva2 $=$ Graphics3D[{Red, Arrow[$\{\{0,0,0\},\{0,0,-1\}\}$]}];
curva3 $=$ Graphics3D[{Arrow[$\{\{0,1/2,0\},\{0,1/2,1\}\}$]}];
curva4 $=$ Graphics3D[{Red, Arrow[$\{\{0,1/2,0\},\{0,1/2,-1\}\}$]}];
curva5 $=$ Graphics3D[{Arrow[$\{\{0,-1/2,0\},\{0,-1/2,1\}\}$]}];
curva6 $=$ Graphics3D[{Red, Arrow[$\{\{0,-1/2,0\},\{0,-1/2,-1\}\}$]}];
Show[sup1, curva1, curva2, curva3, curva4, curva5, curva6]
Figura 5.32:
sup1 $=$ ContourPlot3D[$\{y\char`^2+x\char`^2==z\},\{x,-2,2\},\{y,-2{,}5,2\},\{z,0,3\}$,
Axes $\to$ True, AxesOrigin $\to \{0,0,0\}$, AxesLabel $\to \{y,x,z\}$,
PlotPoints $\to 40$, ContourStyle->Opacity[0,3]];
curva1 $=$ Graphics3D[{Red, Arrow[$\{\{0,0,0\},\{0,0,-{,}5\}\}$]}];
curva2 $=$ Graphics3D[{Arrow[$\{\{0,0,0\},\{0,0,{,}5\}\}$]}];
curva3 $=$ Graphics3D[{Arrow[$\{\{1,1,2\},\{{,}5,{,}5,2{,}2\}\}$]}];
curva4 $=$ Graphics3D[{Red, Arrow[$\{\{1,1,2\},\{1{,}5,1{,}5,1{,}8\}\}$]}];
curva5 $=$ Graphics3D[{Arrow[$\{\{-1,-1,2\},\{-{,}1,-{,}1,2{,}3\}\}$]}];
curva6 $=$ Graphics3D[{Red, Arrow[$\{\{-1,-1,2\},\{{,}1,-2{,}2,1{,}8\}\}$]}];
Show[sup1, curva1, curva2, curva3, curva4, curva5, curva6]
Figura 5.33:
sup1 $=$ ParametricPlot3D[$\{u$Cos$[v], 2-u$Sin$[v], u$Sin$[v]\},\{u,0,2\}$,
$\{v,0,$ 2Pi$\}$, Axes $\to$ True, AxesOrigin $\to \{0,0,0\}$, AxesLabel $\to \{y,x,z\}$,
PlotPoints $\to 60]$;
sup2 $=$ ContourPlot3D[$\{x\char`^2+z\char`^2==4\},\{x,-3,3\},\{y,-3,4\}$,
$\{z,-3,3\}$, Axes $\to$ True, AxesOrigin $\to \{0,0,0\}$, AxesLabel $\to \{y,x,z\}$,
PlotPoints $\to 40$, ContourStyle->Opacity[0,1]];
curva1 $=$ Graphics3D[{Arrow[$\{\{0,2,0\},\{0,3,1\}\}$]}];
curva2 $=$ Graphics3D[{Arrow[$\{\{0,1,1\},\{0,2,2\}\}$]}];
curva3 $=$ Graphics3D[{Arrow[$\{\{0,3,-1\},\{0,4,0\}\}$]}];

Show[sup1, sup2, curva1, curva2, curva3]
Figura 5.34:
sup1 = ParametricPlot3D[{3Cos[v], 3Sin[v], u}, {u, −1, 1}, {v, Pi/4, 3Pi/4},
Axes → True, AxesOrigin → {0, 0, 0}, AxesLabel → {y, x, z},
PlotPoints → 40];
curva1 = Graphics3D[{Arrow[{{0, 3, 0}, {0, 2,5, 0}}]}];
curva2 = Graphics3D[{Arrow[{{0, 3, 1}, {0, 2,5, 1}}]}];
curva3 = Graphics3D[{Arrow[{{0, 3, −1}, {0, 2,5, −1}}]}];
Show[sup1, curva1, curva2, curva3]
Figura 5.35:
s1 = ParametricPlot3D[{x, y, Sin[y]}, {y, 0, Pi}, {x, 0, 2}, Axes → True,
AxesOrigin → {0, 0, 0}, AxesLabel → {x, y, z}, PlotPoints → 40];
c1 = Graphics3D[{Arrow[{{0, Pi/2, 1}, {0, Pi/2, ,5}}]}];
Show[s1, c1]
Figura 5.36:
ParametricPlot3D[{uCos[v], uSin[v], u^2 − uSin[v]}, {u, 0, $\sqrt{2}$}, {v, 0, 2Pi},
Axes → True, AxesOrigin → {0, 0, 0}, AxesLabel → {y, x, z}, PlotPoints → 40]
Figura 5.37:
ParametricPlot3D[{Cos[u]Sin[v], Sin[u]Sin[v], 1 + Cos[v]},
{u, −Pi/4, Pi/4}, {v, 0, Pi}, Axes → True, AxesOrigin → {0, 0, 0},
AxesLabel → {x, y, z}, PlotPoints → 40]
Figura 5.38:
g1 = RegionPlot3D[$x + y + z \leq 1$&&$x \geq 0$&&$y \geq 0$&&$z \geq 0$, {x, −1, 1,1},
{y, −1, 1,1}, {z, −1, 1,1}, Axes → True, AxesOrigin → {0, 0, 0},
AxesLabel → {y, x, z}, PlotPoints → 40, PlotStyle->Opacity[0,2]];
curva1 = Graphics3D[{Arrow[{{0, 0, 0}, {0, 0, −1}}]}];
curva2 = Graphics3D[{Arrow[{{0, 0, 0}, {−1, 0, 0}}]}];
curva3 = Graphics3D[{Arrow[{{1/2, 0, 0}, {1/2, −1, 0}}]}];
curva4 = Graphics3D[{Arrow[{{0, 1/2, 0}, {−1, 1/2, 0}}]}];
Show[g1, curva1, curva2, curva3, curva4]
Figura 5.39a:
ParametricPlot3D[{x, 0, z}, {x, 0, 1}, {z, 0, 1 − x}, Axes → True,
AxesOrigin → {0, 0, 0}, AxesLabel → {x, y, z}, PlotPoints → 40]
Figura 5.39b:
ParametricPlot3D[{0, y, z}, {y, 0, 1}, {z, 0, 1 − y}, Axes → True,
AxesOrigin → {0, 0, 0}, AxesLabel → {x, y, z}, PlotPoints → 40]
Figura 5.40a:
ParametricPlot3D[{x, y, 0}, {x, 0, 1}, {y, 0, 1 − x}, Axes → True,
AxesOrigin → {0, 0, 0}, AxesLabel → {x, y, z}, PlotPoints → 40]
Figura 5.40b:
ParametricPlot3D[{x, y, 1 − x − y}, {x, 0, 1}, {y, 0, 1 − x}, Axes → True,
AxesOrigin → {0, 0, 0}, AxesLabel → {x, y, z}, PlotPoints → 40]

Capítulo 6

Figura 6.1:
curva1 = ContourPlot$[y == 0, \{x, -1, 1\}, \{y, -1, 1\}$, Axes $\to$ True,
AxesOrigin $\to \{0, 0\}$, AxesLabel $\to \{x, y\}$,
ContourStyle->{Red, Thick}, Frame $\to$ False];
curva2 = ContourPlot$[y$^$2 + x$^$2 == 1, \{x, -1, 1\}, \{y, 0, 1\}$, Axes $\to$ True,
AxesOrigin $\to \{0, 0\}$, AxesLabel $\to \{x, y\}$, ContourStyle->{Blue, Thick},
Frame $\to$ False];
curva3 = ContourPlot$[y == 1 -$ Abs$[x], \{x, -1, 1\}, \{y, -1, 1\}$, Axes $\to$ True,
AxesOrigin $\to \{0, 0\}$, AxesLabel $\to \{x, y\}$, ContourStyle->{Thick},
Frame $\to$ False];
curva4 = ContourPlot$[y$^$2 + x$^$2 == 1, \{x, -1, 1\}, \{y, -1, 0\}$, Axes $\to$ True,
AxesOrigin $\to \{0, 0\}$, AxesLabel $\to \{x, y\}$, ContourStyle->{Green, Thick},
Frame $\to$ False];
curva5 = ContourPlot$[y == -1 +$ Abs$[x], \{x, -1, 1\}, \{y, -1, 1\}$, Axes $\to$ True,
AxesOrigin $\to \{0, 0\}$, AxesLabel $\to \{x, y\}$, ContourStyle->{Orange, Thick},
Frame $\to$ False];
curva6 = ContourPlot$[y == (x - 1)(x + 1)(x - 1/2)(x + 1/2), \{x, -1, 1\}$,
$\{y, -1, 1\}$, Axes $\to$ True, AxesOrigin $\to \{0, 0\}$, AxesLabel $\to \{x, y\}$,
ContourStyle->{Brown, Thick}, Frame $\to$ False];
curva7 = ContourPlot$[y == -(x - 1)(x + 1), \{x, -1, 1\}, \{y, -1, 1\}$,
Axes $\to$ True, AxesOrigin $\to \{0, 0\}$, AxesLabel $\to \{x, y\}$,
ContourStyle->{Pink, Thick}, Frame $\to$ False];
Show[curva1, curva2, curva3, curva4, curva5, curva6, curva7]
Figura 6.2:
ParametricPlot$[\{t$Cos$[t], t$Sin$[t]\}, \{t, 0, 4$Pi$\}$, Axes $\to$ True,
AxesOrigin $\to \{0, 0\}$, AxesLabel $\to \{x, y\}$, Frame $\to$ False]
Figura 6.3:
c1 = ParametricPlot3D[{3Cos$[t], -3$Sin$[t], 3$Sin$[t]\}, \{t, 0,$ Pi},
Axes $\to$ True, PlotStyle->{Black, Thick}, AxesOrigin $\to \{0, 0, 0\}$,
AxesLabel $\to \{x, y, z\}$];
s1 = ContourPlot3D$[\{x$^$2 + z$^$2 == 9\}, \{x, -3, 3\}, \{y, -3, 0\}, \{z, -3, 3\}$,
Axes $\to$ True, AxesOrigin $\to \{0, 0, 0\}$, AxesLabel $\to \{y, x, z\}$,
PlotPoints $\to 40$, ContourStyle->Opacity[0,2]];
s2 = ContourPlot3D$[\{z + y == 0\}, \{x, -2{,}2, 2{,}2\}, \{y, -3, 3\}, \{z, -3, 3\}$,
Axes $\to$ True, AxesOrigin $\to \{0, 0, 0\}$, AxesLabel $\to \{y, x, z\}$,
PlotPoints $\to 40$, ContourStyle->Opacity[0,2]];
Show[c1, s1, s2]

Capítulo 7

Figura 7.1:
curva1 $=$ ContourPlot$[y ==$ Sin$[x], \{x, 0, 2\pi\}, \{y, -2, 2\}$, Axes $\rightarrow$ True,
AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y\}$,
ContourStyle->$\{$Red, Thick$\}$, Frame $\rightarrow$ False$]$;
curva2 $=$ ContourPlot$[y ==$ Sin$[x] + 1, \{x, 0, 2\pi\}, \{y, -2, 2\}$, Axes $\rightarrow$ True,
AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y\}$,
ContourStyle->$\{$Red, Thick$\}$, Frame $\rightarrow$ False$]$;
curva3 $=$ ContourPlot$[x ==$ 2Pi$, \{x, 0, 2\pi + 1\}, \{y, 0, 1\}$, Axes $\rightarrow$ True,
AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y\}$,
ContourStyle->$\{$Red, Thick$\}$, Frame $\rightarrow$ False$]$;
g1 $=$ RegionPlot$[0 \leq x \leq 4\pi \&\&$Sin$[x] \leq y \leq$ Sin$[x] + 1, \{x, -1, 2\pi\}, \{y, -2, 2\}$,
Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y\}$, Ticks $\rightarrow$ False,
Frame $\rightarrow$ False$]$;
Show$[$curva1, curva2, curva3, g1$]$
Figura 7.3:
curva1 $=$ ContourPlot$[y == 0, \{x, 0, 2\}, \{y, -,1, ,8\}$, Axes $\rightarrow$ True,
AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y\}$,
ContourStyle->$\{$Thick$\}$, Frame $\rightarrow$ False$]$;
curva2 $=$ ContourPlot$[y == x, \{x, 0, 2/3\}, \{y, 0, 2/3\}$, Axes $\rightarrow$ True,
AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y\}$,
ContourStyle->$\{$Thick$\}$, Frame $\rightarrow$ False$]$;
curva3 $=$ ContourPlot$[2 - 2y == x, \{x, 0, 2\}, \{y, 0, 2/3\}$, Axes $\rightarrow$ True,
AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y\}$,
ContourStyle->$\{$Thick$\}$, Frame $\rightarrow$ False$]$;
g1 $=$ RegionPlot$[0 \leq y \leq 2/3\&\&y \leq x \leq 2 - 2y, \{x, -,1, 2\}, \{y, -,5, ,8\}$,
Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y\}$,
Ticks $\rightarrow$ False, Frame $\rightarrow$ False$]$;
Show$[$curva1, curva2, curva3, g1$]$
Figura 7.4:
ContourPlot$[(y - 1)\hat{}2 + x\hat{}2 == 4, \{x, -2{,}1, 2{,}1\}, \{y, -1{,}1, 3{,}1\}$,
Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y\}$,
Frame $\rightarrow$ False$]$
Figura 7.5:
ParametricPlot$[\{t,$ Sin$[t]\}, \{t, 0,$ Pi$\}$, Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0\}$,
AxesLabel $\rightarrow \{x, y\}$, Frame $\rightarrow$ False$]$
Figura 7.6:
ContourPlot$[y == 0, \{x, 0,$ Pi$\}, \{y, -,1, ,1\}$, Axes $\rightarrow$ True,
AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y\}$, ContourStyle->$\{$Blue, Thick$\}$,
Frame $\rightarrow$ False$]$
Figura 7.7:
ParametricPlot$[\{$Cos$[t]$, Sin$[t]\}, \{t,$ 5Pi$/4,$ 9Pi$/4\}$, Axes $\rightarrow$ True,
AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y\}$, Frame $\rightarrow$ False$]$

Figura 7.8:
RegionPlot[Abs[y] $\leq$ Abs[x]&& $-1 \leq x \leq 2, \{x, -1{,}2, 2{,}2\}, \{y, -2{,}2, 2{,}2\}$,
Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y\}$,
Frame $\rightarrow$ False]

Capítulo 8

Figura 8.1:
$\text{sup} =$ ContourPlot3D[$\{y\hat{}2 + x\hat{}2 + (z-1)\hat{}2 == 1\}, \{x, -1{,}5, 1{,}5\}$,
$\{y, -1{,}5, 1{,}5\}, \{z, -1, 2\}$, Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0, 0\}$,
AxesLabel $\rightarrow \{y, x, z\}$, PlotPoints $\rightarrow 40$, ContourStyle->Opacity[0]];
curva1 = Graphics3D[{Arrow[$\{\{0, 0, 2\}, \{0, 0, 1{,}5\}\}$]}];
curva2 = Graphics3D[{Arrow[$\{\{0, 1, 1\}, \{0, {,}5, 1\}\}$]}];
curva3 = Graphics3D[{Arrow[$\{\{1, 0, 1\}, \{{,}5, 0, 1\}\}$]}];
Show[sup, curva1, curva2, curva3]
Figura 8.3:
g1 = RegionPlot3D[$y + x + z \leq 2\&\&0 \leq z \leq y\&\&y \leq x, \{x, 0, 2\}, \{y, 0, 2\}$,
$\{z, -{,}5, 1\}$, Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0, 0\}$,
AxesLabel $\rightarrow \{y, x, z\}$, PlotPoints $\rightarrow 40$];
curva1 = Graphics3D[{Arrow[$\{\{1/2, 1/2, 0\}, \{1/2, 1/2, -1/2\}\}$]}];
curva2 = Graphics3D[{Arrow[$\{\{1/2, 1/4, 1/4\}, \{1/2, {,}01, {,}5\}\}$]}];
Show[g1, curva1, curva2]
Figura 8.4:
g1 = ContourPlot3D[$\{y\hat{}2 + x\hat{}2 + z\hat{}2 == 1\}, \{x, -1{,}5, 1{,}5\}, \{y, -1{,}7, 0\}$,
$\{z, -1, 2\}$, Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y, z\}$,
PlotPoints $\rightarrow 40$, ContourStyle->Opacity[0,3]];
c1 = Graphics3D[{Arrow[$\{\{0, -1, 0\}, \{0, -1/2, 0\}\}$]}];
c2 = Graphics3D[{Arrow[$\{\{0, 0, 1\}, \{0, 0, {,}5\}\}$]}];
c3 = Graphics3D[{Arrow[$\{\{1, 0, 0\}, \{0{,}5, 0, 0\}\}$]}];
Show[g1, c1, c2, c3]
Figura 8.5:
g1 = ContourPlot3D[$\{4 - (y\hat{}2 + z\hat{}2) == x\}, \{x, 0, 4\}, \{y, -2, 2\}$,
$\{z, -2, 2\}$, Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y, z\}$,
PlotPoints $\rightarrow 40$, ContourStyle->Opacity[0,3]];
c3 = Graphics3D[{Arrow[$\{\{4, 0, 0\}, \{3, 0, 0\}\}$]}];
Show[g1, c3]
Figura 8.6:
g1 = RegionPlot3D[$y\hat{}2 + x\hat{}2 \leq z\hat{}2\&\&0 \leq z \leq 1, \{x, -2, 2\}, \{y, -2, 2\}$,
$\{z, 0, 1{,}5\}$, Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{y, x, z\}$,
PlotPoints $\rightarrow 80$, PlotStyle->Opacity[0,3]];
c1 = Graphics3D[{Arrow[$\{\{0, 0, 1\}, \{0, 0, 1{,}5\}\}$]}];
c2 = Graphics3D[{Arrow[$\{\{1/2, 0, 1/2\}, \{1, 0, 1/4\}\}$]}];
c3 = Graphics3D[{Arrow[$\{\{0, 1/2, 1/2\}, \{0, 1, 1/3\}\}$]}];
Show[g1, c1, c2, c3]
Figura 8.7:

g1 = RegionPlot3D$[(y-1)\hat{}2+x\hat{}2 \leq 1\&\&0 \leq z \leq 1, \{x,-2,2\}, \{y,-2,2\},$
$\{z,0,3\}$, Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0,0,0\}$, Ticks $\rightarrow$ False,
AxesLabel $\rightarrow \{y,x,z\}$, PlotPoints $\rightarrow 40]$;
g2 = RegionPlot3D$[(y-1)\hat{}2+x\hat{}2 \leq 1\&\&1 \leq z \leq 1+xSin[xy], \{x,-2,2\},$
$\{y,-2,2\}, \{z,0,3\}$, Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0,0,0\}$,
Ticks $\rightarrow$ False, AxesLabel $\rightarrow \{y,x,z\}$, PlotPoints $\rightarrow 40$,
PlotStyle->Opacity[0,4]];
Show[g1, g2]
Figura 8.8:
sup1 = ContourPlot3D$[\{x\hat{}2+(y-1)\hat{}2==1\}, \{x,-1,1\}, \{y,0,3\},$
$\{z,0,2\}$, Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0,0,0\}$, Ticks $\rightarrow$ False,
AxesLabel $\rightarrow \{x,y,z\}$, PlotPoints $\rightarrow 40]$;
curva = ParametricPlot3D$[\{0,2,v\}, \{v,0,2\}$, Axes $\rightarrow$ True, Ticks $\rightarrow$ False,
AxesLabel $\rightarrow \{x,y,z\}$, PlotStyle->{Thick}, PlotPoints $\rightarrow 40]$;
curva1 = Graphics3D[{Arrow$[\{\{0,2,0\},\{0,3,0\}\}]\}]$;
curva2 = Graphics3D[{Arrow$[\{\{0,2,1\},\{0,3,1\}\}]\}]$;
curva3 = Graphics3D[{Arrow$[\{\{0,2,2\},\{0,3,2\}\}]\}]$;
Show[sup1, curva, curva1, curva2, curva3]

Capítulo 9

Figura 9.1:
g1 = RegionPlot3D$[x\hat{}2+y\hat{}2$<=$z\&\&z \leq 1, \{x,-1,1\}, \{y,-1,1\}, \{z,0,$1,2$\}$,
Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0,0,0\}$, Ticks $\rightarrow$ True, AxesLabel $\rightarrow \{x,y,z\}$,
PlotPoints $\rightarrow 40]$;
curva = ParametricPlot3D[{Cos$[t]$, Sin$[t]$, $1\}, \{t,0,$2Pi$\}$, Axes $\rightarrow$ True,
Ticks $\rightarrow$ False, AxesLabel $\rightarrow \{x,y,z\}$, PlotStyle->{Thick}, PlotPoints $\rightarrow 40]$;
Show[g1, curva]
Figura 9.2:
g1 = ParametricPlot3D$[\{2-r$Cos$[t], r$Cos$[t], r$Sin$[t]\}, \{t,0,$2Pi$\}, \{r,0,1\}$,
Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0,0,0\}$, Ticks $\rightarrow$ True, AxesLabel $\rightarrow \{x,y,z\}$,
PlotPoints $\rightarrow 40]$;
s2 = ContourPlot3D$[\{y\hat{}2+z\hat{}2==1\}, \{x,-3,3\}, \{y,-3,3\}, \{z,-3,3\}$,
Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0,0,0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{y,x,z\}$, PlotPoints $\rightarrow 40$,
ContourStyle->Opacity[0,2]];
s3 = ContourPlot3D$[\{x+y==2\}, \{x,-$2,2, 2,2$\}, \{y,-3,3\}, \{z,-3,3\}$,
Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0,0,0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{y,x,z\}$,
PlotPoints $\rightarrow 40$, ContourStyle->Opacity[0,2]];
curva = ParametricPlot3D$[\{2-$Cos$[t]$, Cos$[t]$, Sin$[t]\}, \{t,0,$2Pi$\}$,
Axes $\rightarrow$ True, Ticks $\rightarrow$ False, AxesLabel $\rightarrow \{x,y,z\}$,
PlotStyle->{Thick}, PlotPoints $\rightarrow 40]$;
Show[g1, s2, s3, curva]
Figura 9.3:
g1 = RegionPlot$[x\hat{}2+y\hat{}2 \leq 1\&\&x+y \geq 1, \{x,0,1\}, \{y,0,1\}$,
Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0,0\}$, Ticks $\rightarrow \{\{0,1\},\{0,1\}\}$,

AxesLabel $\to \{x, y\}$, Frame $\to$ False];
curva $=$ ContourPlot$[\{x\hat{}2 + y\hat{}2 == 1\}, \{x, 0, 1\}, \{y, 0, 1\}$, Axes $\to$ True,
Ticks $\to$ True, AxesLabel $\to \{x, y\}$,
ContourStyle->{Thick}, Frame $\to$ False];
curva1 $=$ ContourPlot$[\{x + y == 1\}, \{x, 0, 1\}, \{y, 0, 1\}$, Axes $\to$ True,
Ticks $\to$ True, AxesLabel $\to \{x, y\}$,
ContourStyle->{Thick}, Frame $\to$ False];
Show[g1, curva, curva1]
Figura 9.4:
g1 $=$ ParametricPlot3D[{rCos[t], rSin[t], 0}, {$t, 0$, 2Pi}, $\{r, 0, 1\}$,
Axes $\to$ True, AxesOrigin $\to \{0, 0, 0\}$, Ticks $\to$ True,
AxesLabel $\to \{x, y, z\}$, PlotPoints $\to 40$];
curva $=$ ParametricPlot3D[{Cos[t], Sin[t], 0}, {$t, 0$, 2Pi}, Axes $\to$ True,
Ticks $\to$ False, AxesLabel $\to \{x, y, z\}$, PlotStyle->{Thick},
PlotPoints $\to 40$];
Show[g1, curva]
Figura 9.5a:
g1 $=$ ParametricPlot3D$[\{x, y, 2 - x - y\}, \{x, 0, 1\}, \{y, 0, 1 - x\}$,
Axes $\to$ True, AxesOrigin $\to \{0, 0, 0\}$, Ticks $\to$ True, AxesLabel $\to \{x, y, z\}$,
PlotPoints $\to 40$];
g2 $=$ ParametricPlot3D$[\{x, y, 0\}, \{x, 0, 1\}, \{y, 0, 1 - x\}$, Axes $\to$ True,
AxesOrigin $\to \{0, 0, 0\}$, Ticks $\to$ True, AxesLabel $\to \{x, y, z\}$,
PlotPoints $\to 40$];
curva $=$ Graphics3D[{Arrow$[\{\{,25, ,25, 1,5\}, \{,5, ,5, 2\}\}]\}]$;
Show[g1, g2, curva]
Figura 9.6:
g1 $=$ ParametricPlot3D[{rCos[t], $3 - r$Cos[t], rSin[t]}, {$t, 0$, 2Pi}, $\{r, 0, 2\}$,
Axes $\to$ True, AxesOrigin $\to \{0, 0, 0\}$, Ticks $\to$ True, AxesLabel $\to \{x, y, z\}$,
PlotPoints $\to 40$, PlotStyle->Opacity[0,4]];
s2 $=$ ContourPlot3D$[\{x\hat{}2 + z\hat{}2 == 4\}, \{x, -3, 3\}, \{y, -3, 6\}, \{z, -3, 3\}$,
Axes $\to$ True, AxesOrigin $\to \{0, 0, 0\}$, AxesLabel $\to \{y, x, z\}$,
PlotPoints $\to 40$, ContourStyle->Opacity[0,2]];
s3 $=$ ContourPlot3D$[\{x + y == 3\}, \{x, -3, 3\}, \{y, -3, 3\}, \{z, -3, 3\}$,
Axes $\to$ True, AxesOrigin $\to \{0, 0, 0\}$, AxesLabel $\to \{y, x, z\}$,
PlotPoints $\to 40$, ContourStyle->Opacity[0,2]];
curva $=$ ParametricPlot3D[{2Cos[t], $3 -$ 2Cos[t], 2Sin[t]}, {$t, 0$, 2Pi},
Axes $\to$ True, AxesOrigin $\to \{0, 0, 0\}$, Ticks $\to$ True, AxesLabel $\to \{x, y, z\}$,
PlotStyle->{Thick}, PlotPoints $\to 40$];
Show[g1, s2, s3, curva]
Figura 9.7:
sup1 $=$ ContourPlot3D$[\{x\hat{}2 + y\hat{}2 + z\hat{}2 == 1\}, \{x, -1, 1\}, \{y, -1, 1\}$,
$\{z, -1, 1\}$, Axes $\to$ True, AxesOrigin $\to \{0, 0, 0\}$, Ticks $\to$ False,
AxesLabel $\to \{x, y, z\}$, PlotPoints $\to 40$];
sup2 $=$ ContourPlot3D$[\{x + y + z == 0\}, \{x, -1, 1\}, \{y, -1, 1\}, \{z, -1, 1\}$,

Axes $\to$ True, AxesOrigin $\to \{0, 0, 0\}$, Ticks $\to$ False, AxesLabel $\to \{x, y, z\}$,
PlotPoints $\to 40$];
Show[sup1, sup2]
Figura 9.8:
sup1 = ContourPlot3D[$\{x\hat{}2 + z\hat{}2 + 2 == y\}, \{x, -2, 2\}, \{y, 0, 6\}, \{z, -2, 2\}$,
Axes $\to$ True, AxesOrigin $\to \{0, 0, 0\}$, Ticks $\to$ False, AxesLabel $\to \{x, y, z\}$,
PlotPoints $\to 40$, ContourStyle->Opacity[0,2]];
sup2 = ContourPlot3D[$\{4 - (x\hat{}2 + z\hat{}2) == y\}, \{x, -2, 2\}, \{y, 0, 6\}, \{z, -2, 2\}$,
Axes $\to$ True, AxesOrigin $\to \{0, 0, 0\}$, Ticks $\to$ False, AxesLabel $\to \{x, y, z\}$,
PlotPoints $\to 40$, ContourStyle->Opacity[0,3]];
curva = ParametricPlot3D[{Cos[t], 3, Sin[t]}, $\{t, 0,$ 2Pi}, Axes $\to$ True,
AxesOrigin $\to \{0, 0, 0\}$, Ticks $\to$ True, AxesLabel $\to \{x, y, z\}$,
PlotStyle->{Thick}, PlotPoints $\to 40$];
Show[sup1, sup2, curva]
Figura 9.9:
sup1 = ContourPlot3D[$\{x\hat{}2 + y\hat{}2 == 2\}, \{x, -2, 2\}, \{y, -2, 2\}, \{z, -2, 2\}$,
Axes $\to$ True, AxesOrigin $\to \{0, 0, 0\}$, Ticks $\to$ False, AxesLabel $\to \{x, y, z\}$,
PlotPoints $\to 40$, ContourStyle->Opacity[0,2]];
sup2 = ContourPlot3D[$\{x\hat{}2 + 2z\hat{}2 == y\hat{}2\}, \{x, -2, 2\}, \{y, 0, 2\}, \{z, -2, 2\}$,
Axes $\to$ True, AxesOrigin $\to \{0, 0, 0\}$, Ticks $\to$ False, AxesLabel $\to \{x, y, z\}$,
PlotPoints $\to 40$, ContourStyle->Opacity[0,3]];
curva = ParametricPlot3D[$\left\{\text{Cos}[t], \sqrt{2 - \text{Cos}[t]\hat{}2}, \text{Sin}[t]\right\}$, $\{t, 0,$ 2Pi},
Axes $\to$ True, AxesOrigin $\to \{0, 0, 0\}$, Ticks $\to$ True, AxesLabel $\to \{x, y, z\}$,
PlotStyle->{Blue, Thick}, PlotPoints $\to 40$];
Show[sup1, sup2, curva]

Apéndice A

Figura A.2:
c0 = ContourPlot[$(x - 1)\hat{}2 + (y - 2)\hat{}2$==$1/4, \{x, 0, 2{,}5\}, \{y, 0, 2{,}5\}$,
Axes $\to$ True, AxesOrigin $\to \{0, 0\}$, AxesLabel $\to \{x, y\}$,
Ticks $\to \{\{0, {,}5, 1, 1{,}5\}, \{1, 1{,}5, 2{,}5\}\}$, Frame $\to$ False];
c1 = ParametricPlot[$\{u, 2\}, \{u, 0, 1\}$, Axes $\to$ False, PlotStyle $\to$ DotDashed];
c2 = ParametricPlot[$\{1, u\}, \{u, 0, 2\}$, Axes $\to$ False, PlotStyle $\to$ DotDashed];
Show[c0, c1, c2]
Figura A.4:
c0 = ContourPlot[$4x\hat{}2 + (y + 1)\hat{}2 == 9, \{x, -4, 4\}, \{y, -4, 4\}$, Axes $\to$ True,
AxesOrigin $\to \{0, 0\}$, AxesLabel $\to \{x, y\}$, Ticks $\to \{\{0, 1, 1{,}5\}, \{-4, -1, 1, 2\}\}$,
Frame $\to$ False];
c1 = ParametricPlot[$\{u, -1\}, \{u, 0, 1{,}5\}$, Axes $\to$ False,
PlotStyle $\to$ DotDashed];
c2 = ParametricPlot[$\{1{,}5, u\}, \{u, -1, 0\}$, Axes $\to$ False,
PlotStyle $\to$ DotDashed];
Show[c0, c1, c2]

Figura A.5:
c0 = ContourPlot$[x\hat{}2 - y\hat{}2{=}{=}1, \{x, -2, 2\}, \{y, -2, 2\}$, Axes $\rightarrow$ True,
AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y\}$, Ticks $\rightarrow \{\{-1, 0, 1\}, \{-1, 0, 1\}\}$,
Frame $\rightarrow$ False];
c1 = ParametricPlot$[\{u, u\}, \{u, -2, 2\}$, Axes $\rightarrow$ False,
PlotStyle $\rightarrow$ DotDashed];
c2 = ParametricPlot$[\{-u, u\}, \{u, -2, 2\}$, Axes $\rightarrow$ False,
PlotStyle $\rightarrow$ DotDashed];
Show[c0, c1, c2]
Figura A.8:
c0 = ContourPlot$[(x - 1)\hat{}2 - (y - 2)\hat{}2 == 2, \{x, -4, 6\}, \{y, -4, 6\}$,
Axes $\rightarrow$ True, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0\}$, AxesLabel $\rightarrow \{x, y\}$,
Ticks $\rightarrow \{\{-{,}5, 0, 1, 2{,}5\}, \{2\}\}$, Frame $\rightarrow$ False];
c1 = ParametricPlot$[\{u, u + 1\}, \{u, -4, 6\}$, Axes $\rightarrow$ False,
PlotStyle $\rightarrow$ DotDashed];
c2 = ParametricPlot$[\{u, 3 - u\}, \{u, -4, 6\}$, Axes $\rightarrow$ False,
PlotStyle $\rightarrow$ DotDashed];
Show[c0, c1, c2]

Bibliografía

[1] Adams, R. (2009); *Cálculo*, 6ta. edición, Madrid, Ed. Addison-Wesley.

[2] Apostol T. (2002); *Calculus*, Vol 2, Barcelona, Ed. Reverté.

[3] Courant J. y Fritz, J. (1996); *Introducción al cálculo y al análisis matemático*, Vol. 2, Cdad. de Méjico, Ed. Limusa.

[4] Larotonda, G. (2010); *Cálculo y análisis*, Cursos de grado, Depto. de matemática UBA.

[5] Larson R., Hostetler R., Edwards B.(2009); *Cálculo*, Vol. 2, Madrid, Ed. Mc. Graw Hill.

[6] Mardsen J., Tromba A. (1991); *Cálculo vectorial*, Cdad. de Méjico, Ed.Adisson-Wesley.

[7] Pogorelov, A. V. (1980); *Geometry*, Ed. Mir Publishers.

[8] Stewart, J. (2012);*Calculus*, Seventh edition, Madrid, Brooks/Cole.

[9] Thomas, G. (2005); *Cálculo, Varias Variables*, Cdad. de Méjico, Ed. Addison-Wesley.

La integración en varias variables constituye una herramienta fundamental en las ciencias físicas y experimentales, así como también es una construcción matemática muy interesante para su estudio y abordaje en sí misma. Fundamental para la formación de cualquier matemático, físico o ingeniero, es un tema que requiere una sólida comprensión para poder trabajarlo con fluidez ya que se necesita manejo e interpretación geométrica de las regiones sobre las que se realiza.

Lo abordado en este libro se articula y se apoya fuertemente en temas como: integración en una sola variable, propiedades de los números reales, análisis de funciones escalares y vectoriales, rectas, planos y diferenciación, entre otros temas.

Con la idea de que los estudiantes puedan repensar las clases teóricas y tener ejemplos para encarar la práctica, el acento está puesto en disipar las dudas que pueden surgir en la construcción de diferentes tipos de gráficos. Para ello, se han incluido los comandos que se requieren para poder visualizarlos con el programa *Mathematica*.

Universidad Nacional de General Sarmiento

Libro Universitario Argentino

ISBN 978-987-630-323-1

9 789876 303231